2012 第 期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE 中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387



物体下落运动的数学实验解法

200240 上海市闵行中学 何红春

高二理科班一学生在课后向笔者提出这样一个问题: 物体在空中竖直下落, 如果不计空气阻力作自由落体运动, 那么物体下落到地面的速度是$v=\sqrt{2gh}$(其中g是重力加速度, h是物体距离地面的高度). 如果有空气阻力, 因速度在低于音速的情况下, 空气阻力一般正比于速度的平方, 他问物体下落到地面的速度如何计算?

1. 问题表述

物体从高空竖直下落时, 除了受到地球重力的作用, 还受到空气阻力的作用. 阻力的大小与物体的形状和运动速度有关, 假设空气阻力正比于速度的平方, 即$f=k\cdot v^2$, k称为阻力系数. 如果有一个m千克的物体从离地h米的空中竖直下落, 下落时初速度为0, 求其落地时的速度.

2. 模型建立

设$v(t)$、$a(t)$和$s(t)$分别表示物体下落t秒后的速度(单位: 米/秒)、加速度(单位: 米/秒^2)和距离地面的高度(单位: 米). 如图1所示, 由牛顿第二定理得:

$$\begin{cases} mg-f=ma, \\ f=kv^2, \\ v(0)=0, \\ s(0)=h \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g-\dfrac{k}{m}v^2=\dfrac{dv}{dt}, \\ v(0)=0, \\ s(0)=h. \end{cases}$$

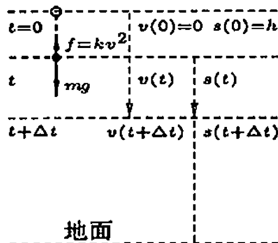


图 1

3. 模型求解

若要求得落到地面的时间, 不仅需要求得$v(t)$, 还要求得$s(t)$, 这实际上是二阶微分方程问题, 高中生还不具有解这个方程的能力. 平时与学生和物理教师的交流中获知, 学生在物理学习过程中已经接触了一些近似求解的思想方法, 高中的一些路程、力学物理问题很多就是运用近似(微分)思想求解的. 考虑到高二数学已学习了算法课程和scilab数学软件, 笔者决定指导他们通过近似计算求解这一问题.

首先将微分问题转化为近似问题, 这一点并不困难, 在$[t,t+\Delta t]$时间段内的变加速直线运动问题看作匀加速直线运动问题, 当$\Delta t\to 0$时, 即为上述微分问题, 而取Δt为较小值时即为近似问题. 上述微分方程可近似表示为方程:

$$g-\frac{k}{m}v^2=\frac{\Delta v}{\Delta t}. \cdots\cdots (1)$$

因在$[t,t+\Delta t]$时间段内视作匀加速直线运动, 由匀加速直线运动公式$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$, 得这一时间段内的位移

$$\begin{aligned}\Delta s&=v(t)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}(\Delta t)^2\\&=\frac{v(t+\Delta t)+v(t)}{2}\Delta t. \cdots\cdots (2)\end{aligned}$$

由方程(1)、(2)得

$$\begin{cases} g-\dfrac{k}{m}\cdot v^2(t)=\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}, \\ s(t)-s(t+\Delta t)=\dfrac{v(t+\Delta t)+v(t)}{2}\cdot\Delta t, \end{cases} \quad (3)$$

由方程组(3)可得

$$\begin{cases} v(t+\Delta t)=v(t)+\left(g-\dfrac{k}{m}\cdot v^2(t)\right)\cdot\Delta t, \\ s(t+\Delta t)=s(t)-\dfrac{v(t+\Delta t)+v(t)}{2}\cdot\Delta t. \end{cases} \quad (4)$$

对方程(4), 依次取$t=0$、Δt、$2\Delta t$、$3\Delta t$、$\cdots$、$n\cdot\Delta t$、$\cdots$

记$v(0)=v_0=0$, $v(\Delta t)=v_1$, $v(2\Delta t)=v_2$, $\cdots$, $v(n\cdot\Delta t)=v_n$, $\cdots$

$s(0)=s_0=h$, $s(\Delta t)=s_1$, $s(2\Delta t)=s_2$, $\cdots$, $s(n\cdot\Delta t)=s_n$, $\cdots$

方程组(4)可写成如下递推数列关系:

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + \left(g - \dfrac{k}{m} \cdot v_n^2\right) \cdot \Delta t, \\ s_{n+1} = s_n - \dfrac{v_n + v_{n+1}}{2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (5)$$

当 $\begin{cases} s_n > 0 \\ s_{n+1} \leqslant 0 \end{cases}$ 时, 物体落到地面时的速度近似为 v_{n+1} 米/秒, 落到地面所需的近似时间为 $T = (n+1) \cdot \Delta t$ 秒.

为探求结论, 指导学生做了一些数学实验, 进行观察:

假设, 物体质量 $m = 10$ 千克, 阻力系数约为 $k = 0.5$, 取重力加速度 $g = 9.80$ 米/秒^2.

考虑到后面需要考察在下落过程中任一时刻的速度, 所以速度 v 和下落高度 s 都设计成数组变量.

实验 ① 先取距离地面高度 $h = 1500$ 米, 分别取 $\Delta t = 1$ 秒、0.1 秒、0.01 秒、0.001 秒, 比较物体落到地面时的速度偏差程度和计算次数情况. 应用 scilab5.0 数学软件计算此问题, 计算结果见表1.

表 1

距离地面的高度	间隔时间 Δt	降落到地面的速度 v	降落到地面所需时间 $T(=n\cdot\Delta t)$	计算次数 n
1500	1	14	108	108
1500	0.1	14	108.2	1082
1500	0.01	14	108.14	10814
1500	0.001	14	108.133	108133

结论: 在 Δt 较小时, 物体降落到地面的速度 v、时间 T 相差不大; 而计算次数大约按10倍关系 (与时间 Δt 成倒数关系) 在增长, 所以如果精度要求不是很高, 计算量要求较少的情况下, 不妨取 $\Delta t = 0.01$.

实验 ② 分别取不同的高度 $h = 15$ 米、50 米、150 米、1500 米、15000 米, $\Delta t = 0.01$ 秒, 比较物体落到地面时的速度和下落时间等情况, 计算结果见表2.

表 2

距离地面的高度 h	接近地面的下落速度 v	下落时间 T
15	12.368418	1.98
50	13.95444	4.56
150	13.999998	11.71
1500	14	108.14
15000	14	1072.42

结论: 在一定的高度下, 物体落到地面的速度是一个常数, 也就是说, 从一定的高度开始, 物体开始匀速下落.

实验 ③ 我们作出在不同高度 (以 50 米、1500 米为例) 的 $v(t)$, $s(t)$ 图像 (如图2) 进行观察, 由此可猜想, $v(t)$ 是增函数, 最终下落速度将趋向于一极限速度, 也就是 $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = v_{\max}$. $s(t)$ 趋向于一线性函数.

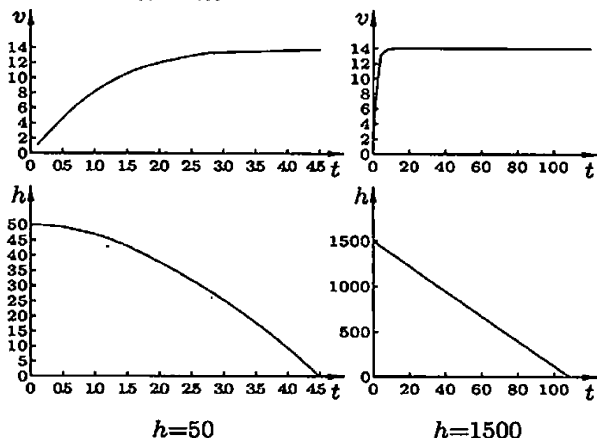


图2

分析上述现象, 当物体从空中开始下落的时候, v 很小, f 很小, $mg > f$, 随着物体逐渐加速, v 增加, f 增加, 最终会达到 $mg = f = kv^2$ 的平衡, 物体开始匀速下落, 解得 $v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$, 此时速度 v 达到最大. 记 $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$, 我们不妨将达到平衡时的速度称为终极速度, 此速度与高度无关, 当 $m = 10$、$g = 9.8$、$k = 0.5$, 计算得 $v_{\max} = 14$.

由表2可知, 在一定的高度下, 如由 150 米、1500 米等高处下落, 大约经过 5、6 秒后物体已接近终极速度下落, 在下落过程中实际已处于匀速状态. 当然, 不同质量的物体和不同的阻力系数, 这一数值会改变, 但下落情况类似, 其终极速度是 $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$.

实验 ④ 鉴于学生对计算求解的结论还处于将信将疑的状态中, 我设法解出这一微分方程, 让学生将计算模拟结果与理论计算结果做对比, 增强学生对计算思想方法的理解与认识.

通过求解此模型的微分方程, 可知

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left(1 + \frac{-2}{e^{2t\sqrt{\frac{gk}{m}}} + 1}\right) \ (t \geqslant 0) \cdots (*)$$

是增函数, 且 $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$.

表3是1500米高度物体下落时在1～9秒时

(下转第5-40页)

让“灵感”和“好奇心”为探究性教学活动导航

314200 浙江省平湖市当湖高级中学 李俊明

自从探究性学习活动被引进高中课堂后，已逐渐受到广大教师的重视. 但无论是教师选择的探究性课题，还是教材给出的探究性问题，都是直接把问题抛给学生，然后采用教师引导学生探究或师生合作共同探究的方式完成. 这样的探究性学习活动，其优点是探究过程的可控性强，便于教师引导和驾驭；缺点是由于问题不是学生自己发现和提出的，活动过程中学生的主体地位体现不足，不能够很好地实现培养学生创新能力之目的.

笔者在日常教学活动中发现，若以学生偶发的“灵感”和“好奇心”所引出的问题为探究对象，则会使探究性学习活动收到更佳的效果，下面通过一个教学实例谈谈自己的体会.

问题1　如图1，已知点$P(a,b)$在圆$O: x^2+y^2=r^2$内，点A、B在圆上，且$PA\perp PB$，求矩形$APBQ$的顶点Q的轨迹.

在圆锥曲线求轨迹方程的复习课上，笔者选择了此题作为第一道例题，经过师生共同分析后，笔者板书了求解过程：

解：设$Q(x,y)$、$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

由已知可得

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=r^2, & (1)\\ x_2^2+y_2^2=r^2, & (2)\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{a+x}{2}, & (3)\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{b+y}{2}, & (4)\\ (x_1-a)(x_2-a)+(y_1-b)(y_2-b)=0. & (5)\end{cases}$$

(5)式整理得$x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2+y_1y_2-b(y_1+y_2)+b^2=0$，

将(3)、(4)式代入上式得

$$x_1x_2+y_1y_2=ax+by. \quad (6)$$

(1)+(2)配方得$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=2r^2+2x_1x_2+2y_1y_2$，

将(3)、(4)、(6)式代入此式整理得$x^2+y^2=2r^2-(a^2+b^2)$，所求轨迹是以原点为圆心，以$\sqrt{2r^2-(a^2+b^2)}$为半径长的圆.

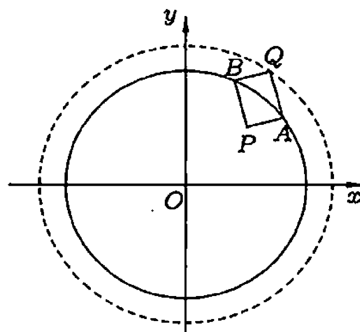


图1

至此，问题1已经得到圆满解决，为了加深学生对解析法的认识，笔者又出示了一道练习题让学生练习，在巡视时发现有两位同学并没有做笔者布置的练习题，而在讨论刚才的例题.

于是笔者问道：“刚才的例题你们哪儿还不懂？”

生：懂是懂了，我们就是对所求出的轨迹有点好奇，它怎么会是一个与已知圆同心的圆呢？而且，若改变点$P(a,b)$的位置，只要它到原点的距离不变，点Q的轨迹就不变，真奇妙，于是我们俩在讨论有什么内在的几何性质呢？

笔者听到这里心里为之一颤，兴奋于孩子们的好奇心和强烈的探究欲望，惭愧于自己对这一问题的草草了结. 于是笔者开始了下面的教学活动：

师：同学们完成练习了吗？

生：完成了.

师：通过例题的学习和练习我们再次认识和体验了坐标法的重要意义，并进一步熟悉了求轨迹方程的基本步骤—建系（需要时）、设点、列式、化简. 坐标法将代数的方法系统地应用于几何命题的求解与证明，将“数”和“形”紧密地结合在了一起，这也正是解析几何的核心思想. 刚才

我们在做练习的时候, 有两位同学一直在思考例题的结论, 他们惊讶于所求轨迹是和已知圆同心的一个圆, 而且这个圆只与点 $P(a,b)$ 到原点的距离有关, 即当点 P 在以原点为圆心的圆上运动时, 点 Q 轨迹不变. 好奇心促使他们去探寻该问题的几何意义, 非常好, 下面我们大家一起来探究他们的发现.

当我们要解决的问题与圆和圆的弦相关时, 我们经常关注的几何性质是什么?

生: 垂径定理.

师: 对, 那我们为了研究该问题中蕴含的几何性质, 应该做什么?

生: 延长 AP、BP 交圆于点 A'、B', 分别连结圆心 O 和弦 AA' 和 BB' 的中点 E、F, 则 $OE \perp AA'$, $OF \perp BB'$ (如图2).

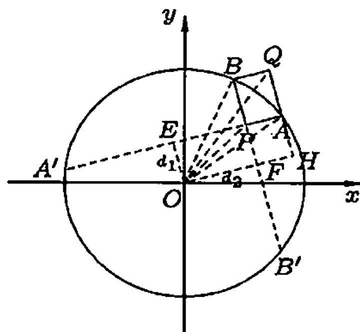


图 2

师: 我们从图中能找到什么关系式呢?

生: 设 $OE = d_1, OF = d_2$, 则有 $d_1^2 + d_2^2 = |OP|^2 = a^2 + b^2$ 为常数.

师: 很好, 还有其他关系式吗?

生: 延长 QA 和 OF 交于点 H, 也得到一个直角三角形, 所以 $|OQ|^2 = |OH|^2 + |QH|^2$.

还有 $|OH|^2 = |OA|^2 - |AH|^2 = r^2 - d_1^2$, $|QH|^2 = |BF|^2 = |OB|^2 - |OF|^2 = r^2 - d_2^2$. 这样, 由上述关系式可得 $|OQ|^2 = |OH|^2 + |QH|^2 = 2r^2 - (a^2 + b^2)$, 即点 Q 到原点的距离不变, 其轨迹方程是: $x^2 + y^2 = 2r^2 - (a^2 + b^2)$, 而且从方程还可以看出, 当点 P 到原点的距离在区间 $[0, \sqrt{2}r)$ 内变化时, 点 Q 的轨迹都是圆, 当 $|PO| = \sqrt{2}r$ 时, 点 Q 的轨迹收缩为原点.

师: 非常好, 首先我们要感谢发现问题的两位同学, 由于他们对结论的好奇, 引发了要探个究竟的热情, 从而给我们提供了一次有价值的探究活动. 同时也启发我们, 题目解答完毕以后留一双慧眼, 回过头来再看一看我们的解答过程和结论, 是否有新的发现, 比如解答方法是否新颖、所得结论是否优美或是否具有一般性等, 即要养成解题反思的好习惯.

至此, 同学们从圆的几何性质出发, 成功探究出了轨迹方程, 发现问题的两位同学受到老师的表扬, 兴奋之情溢于言表. 就在同学们还处在兴奋之时, 有一位同学突发奇想: 老师, 那要是将已知条件中的圆变为椭圆, 其他条件不变, 点 Q 的轨迹会不会也变成椭圆呢? 听到这里, 受刚才喜悦心情的鼓舞, 同学们的探究热情又被调动起来. 说心里话笔者之前也没有研究过这一问题, 但看到同学们跃跃欲试的高涨热情, 笔者也索性放开, 和大家一起再来探讨.

问题2　如图3, 已知点 $P(m,n)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,(a > b > 0)$ 内, 点 A、B 在椭圆上, 且 $PA \perp PB$, 则矩形 $APBQ$ 的顶点 Q 的轨迹是椭圆吗?

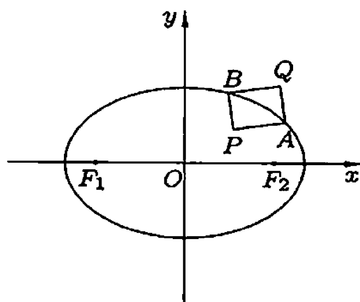


图 3

就在一部分同学还在忙着找关系式的时候, 有两位同学很快得出结论: 点 Q 的轨迹不是椭圆.

师: 你们是怎么判断出来的?

生: 我们按要求作了几个矩形后描点连线, 发现点 Q 的轨迹如图4所示, 显然不是椭圆.

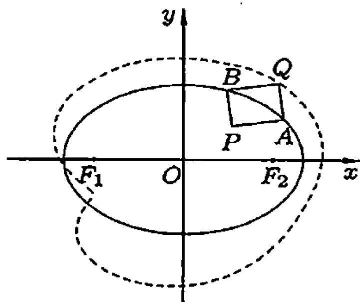


图 4

师: 很好, 他们通过描点作图得出轨迹不是

椭圆.

当看到点Q的轨迹不是椭圆, 同学们都有点儿失望, 那些试图通过建立关系式求轨迹方程的同学也放弃了继续求解. 就在大多数同学处于沉默的时候, 一位同学突然提出: 那能不能再改变一下PA与PB所成的角, 作平行四边形$APBQ$, 从而使点Q的轨迹成为椭圆呢?

此话一出, 同学们的热情再次被点燃, 看到同学们如此渴望得到一个完美的椭圆轨迹, 笔者也一同被感染, 于是又开始了新的探究.

师: 既然想到要改变$\angle APB$大小,那么如何改? 依据是什么? 请同学们类比问题1认真思考.

生: 在圆中$\angle APB$是直角, 而圆的直径所对的圆周角是直角, 我从这一联系中想到可否研究一下过椭圆中心的弦所对的椭圆周角的性质, 从而找到椭圆中与$\angle APB$的关联关系呢?

师: 想法很好, 我们来探究一下过椭圆中心的弦所对的椭圆周角有何性质(如图5), 首先我们确定一下研究方向, 大家说我们应该考虑$\angle APB$的什么性质呢?

图 5

生: 在圆中, 直径所对的圆周角是定值直角, 且当PA、PB的斜率存在时, $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$也为定值, 所以在椭圆中也应从这两个方面考虑.

师: 那我们就从这两个方面来考虑, $\angle APB$是定值吗?

生: 不是!

师: 为什么?

生: 改变点P的位置到P', 显然$\angle APB\neq\angle AP'B$(如图5).

师: 大家来计算一下$k_{PA}\cdot k_{PB}$是否为定值.

生: 是定值$-\dfrac{b^2}{a^2}$.

师: 好, 我们看一下他的推理过程(实物投影学生给出的推理过程如下).

如图5, AB是椭圆过中心的弦, 设$A(x_1,y_1)$, 则$B(-x_1,-y_1)$, $P(x_0,y_0)$是椭圆上除A、B外任意一点, 当直线PA、PB的斜率存在时, $k_{PA}=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$, $k_{PB}=\dfrac{y_0+y_1}{x_0+x_1}$. $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\dfrac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\dfrac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}$, 因为$A(x_1,y_1)$、$P(x_0,y_0)$两点在椭圆上, 所以

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \quad ①$$

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1. \quad ②$$

② − ① 整理得$\dfrac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$, 所以$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$为常数.

师: 我们应该对题目进行怎么样的改编呢?

生: 可以尝试将条件$PA\perp PB$改为PA与PB的斜率乘积是$-\dfrac{b^2}{a^2}$, 即将题目改编为:

问题3 已知点$P(m,n)$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$内一点, 点$A$、$B$在椭圆上, 且$PA$与$PB$的斜率乘积是$-\dfrac{b^2}{a^2}$, 求平行四边形$APBQ$的顶点$Q$的轨迹.

师: 很好, 下面我们一起来探究一下, 改编后点Q的轨迹会不会如大家所愿是椭圆呢?

很快, 学生类比问题1的解法得到了问题3的答案:

生: 如图6, 设$Q(x,y)$、$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 则由已知可得

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1, & (1)\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1, & (2)\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m+x}{2}, & (3)\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{n+y}{2}, & (4)\\ \dfrac{y_1-n}{x_1-m}\cdot\dfrac{y_2-n}{x_2-m}=-\dfrac{b^2}{a^2}, & (5)\end{cases}$$

图 6

(5)式整理得

$b^2x_1x_2-b^2m(x_1+x_2)+b^2m^2+a^2y_1y_2-a^2n(y_1+y_2)+a^2n^2=0$,

将(3)、(4)式代入上式得

$$b^2x_1x_2+a^2y_1y_2=b^2mx+a^2ny, \cdots\cdots(6)$$

(1)+(2)整理得

$$b^2(x_1+x_2)^2+a^2(y_1+y_2)^2=2a^2b^2+2b^2x_1x_2+2a^2y_1y_2, \cdots\cdots(7)$$

将(3)、(4)、(6)式代入(7)式整理得

$$b^2x^2+a^2y^2=2a^2b^2-(a^2n^2+b^2m^2). \quad (8)$$

因为点$P(m,n)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$内, 所以$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}<1$, 即$b^2m^2+a^2n^2<a^2b^2$, 故轨迹是椭圆(除去使$k_{AP}$和$k_{BP}$不存在的点).

看到问题顺利解决, 同学们特有成就感, 脸上露出欣喜的笑容, 于是笔者又及时启发:

刚才发现问题的两位同学给了我们什么启示?

生: 题目解答完毕后, 再回过头来理一理思路, 想一想结论.

师: (笑)进步不小呀! 问题3的解答方法和思路与问题1完全类似, 请同学们仔细观察结论, 还能有新的发现吗?

生1: 点$P(m,n)$不仅在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$内时, 点$Q$轨迹是椭圆, 当点$P(m,n)$在更大的一个椭圆$\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}=1$内时, 点$Q$轨迹都是椭圆, 尤其是当点$P(m,n)$在椭圆$\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}=1$上时, 点$Q$轨迹缩为原点.

生2: 当点$P(m,n)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r$($r$为常数, 且$0<r<2$)上运动时, 点$Q$的轨迹不变.

生3: 把所得轨迹方程$b^2x^2+a^2y^2=2a^2b^2-(a^2n^2+b^2m^2)$化为标准方程得

$$\frac{x^2}{\frac{2a^2b^2-(a^2n^2+b^2m^2)}{b^2}}+\frac{y^2}{\frac{2a^2b^2-(a^2n^2+b^2m^2)}{a^2}}=1,$$

所以, 该椭圆的半长轴长

$$a'=\sqrt{\frac{2a^2b^2-(a^2n^2+b^2m^2)}{b^2}},$$

半短轴长$b'=\sqrt{\frac{2a^2b^2-(a^2n^2+b^2m^2)}{a^2}}$, 半焦距$c'=$

$$\sqrt{\frac{2a^2b^2-(a^2n^2+b^2m^2)}{b^2}-\frac{2a^2b^2-(a^2n^2+b^2m^2)}{a^2}}=\sqrt{2c^2-\frac{c^2}{b^2}n^2-\frac{c^2}{a^2}m^2},$$

所以,

$$e'=\frac{c'}{a'}=\frac{\sqrt{2c^2-\frac{c^2}{b^2}n^2-\frac{c^2}{a^2}m^2}}{\sqrt{\frac{2a^2b^2-(a^2n^2+b^2m^2)}{b^2}}}=\frac{\sqrt{c^2\left(2-\frac{1}{b^2}n^2-\frac{1}{a^2}m^2\right)}}{\sqrt{a^2\left(2-\frac{1}{b^2}n^2-\frac{1}{a^2}m^2\right)}}=\frac{c}{a},$$

即所得轨迹的离心率与原椭圆的离心率相同.

生4: 那双曲线也是否有类似性质呢?

看到同学们获得的成果, 笔者内心感到无比的欣慰, 庆幸自己没有将学生思维的火花熄灭. 同学们看到自己的研究成果, 也特有成就感, 脸上洋溢着发自内心的喜悦笑容. 此时, 下课铃声响起, 为了更好地巩固课堂教学成果和了解同学们对这样的学习活动方式的认可度, 笔者布置了如下作业:

师: 课后请同学们为本节的学习活动作一个书面小结, 谈一谈你的感受和收获. 其次, 对同学4提出的问题进行探究, 给出你的研究结论, 下课!

课后反思:

(1)在得知两位同学讨论的问题后, 笔者有两种选择: 一是让学生课下研究, 课上听老师的话, 跟上老师的教学节拍, 从而完成既定的教学任务. 可这样一来就有可能熄灭学生的思维火花, 因为学生也可能是一时的兴趣和好奇, 下课后未必真的会再去探究, 即便是下课后继续探究, 那也是个体的学习活动, 学生集体受益不大. 二是抓住时机, 即时开展探究性学习活动, 这样教师的既定教学任务会受到影响, 而且会增加教师对课堂的掌控难度. 但适时的问题情境会极大地激发学生的探究热情, 有利于激发和保护学生的好奇心和探究精神. 权衡之后, 笔者选择了后者. 事实证明这样的选择是对的, 从课后学生的作业反馈来看, 学生对这种形式的学习活动非常感兴趣, 而且对学生4提出的问题也给出了完美的解答(这里不再赘述).

(下转第5-15页)

统计拓展课“相关分析”的教学尝试

200137 上海市高桥中学 朱咏梅

一、问题的提出

相关分析是统计学最重要的实际应用之一,但目前我国的中学数学教科书中较少有对相关分析的介绍. 人们也许认为,单变量描述性分析尚且难倒不少学生,就更不用说多变量相关分析. 但有些统计学家和数学教育家却认为,长期(从小学高年级到高中)在单变量描述性统计中“翻跟斗”,使学生看不到现代统计学的真正意义,看不到运用统计学解决实际问题的威力,还不如在适当的时候(比如拓展课)借助一些生动有趣的案例,由浅入深地引入一些相关分析的案例,则有利于形成学生对统计学正确的认识与理解,激发学生的学习热情. 本文介绍作者实验的一次关于相关分析的拓展课.

二、教学过程

(1) 内容和目标

通过一则简单案例体验变量相关的朴素想法;再考虑如何处理数据,引出二分变量相关分析的λ系数法.

(2) 问题引入

为庆祝校庆,班主任老师设想了A、B、C三项活动,用投票方式征求全班学生的意见. 学生对拟议中的三项活动的态度如下表:

表1 学生对活动A的态度

	男	女	共计
赞成	18	12	30
反对	12	8	20
共计	30	20	50

表2 学生对活动B的态度

	男	女	共计
赞成	30	0	30
反对	0	20	20
共计	30	20	50

表3 学生对活动C的态度

	男	女	共计
赞成	25	5	30
反对	5	15	20
共计	30	20	50

(3) 观察和分析

我让学生观察三张表格,提出问题:从以上三张表中,你读到一些什么信息?哪项活动会获得通过?

学生通过观察不难得到以下结论:该班级共有学生50人,其中男生30人,女生20人;又对活动A、B、C,表示赞成的都是30人,占全体学生数的$\frac{30}{50}\times 100\% = 60\%$,而表示反对的都是20人,占全体学生数的40%. 按“简单多数”原则,三项活动都获得通过.

我又提出问题:在三张表中,有几个变量会影响结论?这些变量互相影响吗?有相关性吗?

于是学生发现:性别与态度两个变量相关,表示赞成和表示反对学生的性别构成不同.

我让学生计算持赞成态度的男(女)生占全体男(女)生的百分比,可获得一些数据:

对于活动A,持赞成态度的男生占全体男生的百分比是$\frac{18}{30} = 60\%$,持赞成态度的女生占全体女生的百分比是$\frac{12}{20} = 60\%$,二者相同,当然也与全班学生中持赞成态度者所占的百分比相同.

对于活动B,持赞成态度的男生占全体男生的百分比是$\frac{30}{30} = 100\%$,而持赞成态度的女生占全体女生的百分比是0;反之,持反对态度的男生占全体男生的百分比是0,而持反对态度的女生占全体女生的百分比是$\frac{20}{20} = 100\%$.

对于活动C,持赞成态度的男生占全体男生的百分比是$\frac{25}{30} \approx 83\%$,持赞成态度的女生占全体女生的百分比是$\frac{5}{20} = 25\%$.

由学生得到的数据,我进一步提出问题:以上这些统计数据意味着什么?

于是学生发现:对于活动A,无论男生或女生,赞成者都占60%,反对者都占40%,表明性别

与态度"无关"; 对于活动B, 男生全体赞成, 女生一致反对, 表明性别与态度"绝对有关"; 对于活动C, 男生大部分赞成而少部分反对, 女生则大部分反对而少部分赞成, 可以说性别与态度"有一定关系".

(4) *数学处理*

我对学生所作的分析给出需要讨论的课题: 如何用数学的(统计学的)方式来刻画性别与态度二者之间"无关"、"绝对有关"、"有一定关系"等. 学生通过充足时间的观察和思考, 不难发现: 如果对活动的态度与性别相关, 那么就可以通过性别去推测他(她)对活动的态度, 也可以通过对活动的态度去推测性别(当然有推测错误的概率).

我从旁引导: 通过性别是"男"(女)去推测学生对活动的态度是"赞成"还是"反对"与不问性别随意推测相比, 这样的处理方式可以提高准确率, 降低犯错误的概率. 并且, 态度与性别的相关程度越高, 通过性别推测态度的准确率越高, 犯错误的几率越小. 这就是所谓消减误差比例的思想.

根据我的引导和学生的思考, 学生给出了自己设计的数学处理方案, 学生方案如下:

在表3中, 从最后一列知道, 对于活动C, 共有30人持赞成态度, 占全体学生的多数. 如果据此做出结论"被调查者的态度为赞成", 那关于"赞成的人数"的推测误差为20人. 如果考虑性别, 从第1列知道, 多数男生持赞成态度, 人数为25; 又从第二列知道, 多数女生持反对态度, 人数为15. 如果以性别为参考作判断"男生的态度为赞成, 女生的态度为反对", 产生的推测误差为10人.

教师把学生给出的方案进一步作出解释: 第一考虑整体学生对活动的态度, 认为"被调查者的态度为赞成"的误差为$50-30=20$次. 第二考虑性别, 认为"男生的态度为赞成, 女生的态度为反对"的误差为$(30-25)+(20-15)=10$次. 即根据性别来判断态度使误差减少了$20-10=10$次. 因为总人数不确定, 单用次数说明误差是不合理的, 因此我们用误差减少的次数比原先误差的次数, 即$\frac{10}{20}$, 得到所谓消减误差比例0.5. 我们就用这个数据来表示学生性别与对活动态度的相关程度, 称之为λ系数.

学生结合自己的观点和教师给出的相关知识, 处理表1: 对于活动A, 认为"被调查者的态度为赞成"的误差是$50-30=20$次; 而考虑性别所做出的判断"被调查男生的态度是赞成, 被调查女生的态度是赞成"的误差是$(30-18)+(20-12)=20$, 两个误差相等, 因此学生性别与对活动态度相关性的λ系数为$\frac{20-20}{20}=0$.

紧接着让学生给出表2的处理方案: 对于活动B, 认为"被调查者的态度为赞成"的误差还是$50-30=20$次; 而考虑性别所做出的判断"被调查男生的态度是赞成, 被调查女生的态度是反对"的误差则是$(30-30)+(20-20)=0$, 因此学生性别与对活动态度相关性的λ系数为$\frac{20-0}{20}=1$.

(5) *提炼模型*

经历上述过程后, 学生对λ系数的意义有一定的理解了, 我借鉴表3, 用比较正规的统计学语言来复述λ系数法的运用. 可以把前后两次叙述相对照, 以理解某些统计学术语的涵义.

记"性别"为变量x, x只取两个值"男生"和"女生"; 记"态度"为变量y, y也只取两个值"赞成"和"反对". 这两个变量的值只能把研究对象分类, 只具有"="与"≠"的数学特质, 不能比较先后大小, 更不能作运算. 称这样的变量为二分变量.

由变量y的边缘分布(表格中最后一列是变量y的边缘分布. 表格中最后一行是变量x的边缘分布), 知其众值为"赞成", 频次为30, 若据此做出结论"被调查者的态度为赞成", 则误差$E_1=50-30=20$; 若考虑变量x的取值, 在男生, y的条件分布(表格中第一列是控制x取值"男"时, 变量y的分布, 称为关于y的第一个条件分布. 第二列是控制x取值"女"时, 变量y的分布, 称为关于y的第二个条件分布. 第一行是控制y取值"赞成"时, 变量x的分布, 称为关于x的第一个条件分布. 第二行是控制y取值"反对"时, 变量x的分布, 称为关于x的第二个条件分布.) 众值为"赞成", 频次为25; 在女生, y的条件分布众值为"反对", 频次为15. 若以性别为参考作判断"男生态度为赞成, 女生态度为反对", 则误差$E_2=(30-25)+(20-15)=10$, 于是

变式教学让课堂更精彩

315153 浙江省宁波市鄞州区田莘耕中学 葛琳玲

变式教学是数学教学的一种常用的手段. 数学变式教学是指教师在引导学生解答数学问题时, 变更概念非本质特征, 变更问题的条件或结论, 转换问题的形式或内容, 创设实际应用的各种环境, 使概念或本质不变的一种教学方式. 我们在钻研教材时可以抓住一些典型的例题或练习进行适当地变式, 课堂上引导学生深入探究问题, 使学生解决数学问题的能力一步步地提高. 下面是有关圆锥裁剪问题的思考与变式, 写出来与读者一起探讨.

问题一 有一张边长为1的正方形纸片, 现在要用它来裁剪一个圆锥的侧面与底面, 若侧面的裁剪方式如图1所示, 问能否在余料中裁出符合条件的底面圆?

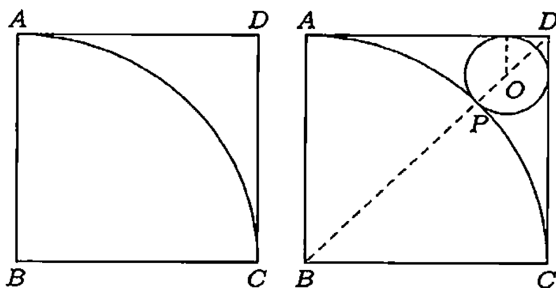


图 1 图 2

分析: 余料中能裁出的最大圆如图2所示, 记作$\odot O$, 其半径记作r. 若这个圆符合条件, 则$\odot O$的周长大于或等于弧AC的长度, 因此解决问题的关键是看弧AC的长度与$\odot O$的周长的大小关系. 显然$\odot O$与 $\odot B$外切, 切点记作P, 则B、P、O、D共线, 易得$OD=\sqrt{2}r$则$BD=1+r+\sqrt{2}r$. 又因在Rt$\triangle BCD$中, $BD=\sqrt{2}$, 故$BD=1+r+\sqrt{2}r=\sqrt{2}$,

$\therefore\ r=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$,

$$\lambda=\frac{E_1-E_2}{E_1}=0.5.$$

显然λ的取值范围为$0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 从以上分析可见, 原来$\lambda=0$就表明两个变量不相关, $0<\lambda\leqslant 1$则意味着两个变量相关, λ的大小定量地刻画了两个变量的相关程度.

关于二分变量相关分析的λ系数法, 现在可以简单地小结如下:

一般地有$\lambda_y=\dfrac{\sum\limits_i f_{im}-F_{ym}}{N-F_{ym}}$. 在这个式子中, f_{im}为变量y的第i个条件分布的众值频次, F_{ym}为y的边缘分布的众值频次, N为总体容量.

这个式子是视x为自变量, 用对y的预测来定义消减误差比例, 所以式中λ系数记作λ_y. 若以y为自变量预测x来定义消减误差比例, 则式中x和y须交换位置, 并记λ系数为λ_x. 一般$\lambda_x\neq\lambda_y$, 即λ系数具有不对称性. 当x和y孰因孰果不明确时, 可分别求出λ_x和λ_y, 以它们的平均数作为λ.

三、小结

本讲中, 二分变量相关分析的λ系数法是重点. 首先是从表1到表3读取信息, 在此基础上发现两个变量的相关性; 其次是对所发现的相关性作数学处理, 定量地刻画两个变量的相关程度.

对这样的探索和建立模型过程, 教师都不能急于给结论、给方法, 要给学生充分的时间来观察、思考, 引导学生自己体会什么是两个变量的相关性, 什么是两个变量的不相关; 然后启发学生自己设计数学处理的方案, 并帮助学生分析他们的方案, 讨论改进的方法, 最终完善他们的方案.

参考文献

[1] 王孝玲. 教育统计学 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2007.

[2] 张彦. 社会统计学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.

$\therefore$ $\odot O$的周长$=2\pi r=2\pi(3-2\sqrt{2})=6\pi-4\sqrt{2}\pi$.

弧AC的长度$=\frac{90}{180}\pi\times 1=\frac{1}{2}\pi$,

$\therefore$ $\odot O$的周长小于弧AC的长度,

$\therefore$ 不能在余料中裁出符合条件的底面圆.

既然此种裁剪方案行不通, 那么可以把侧面裁得再小一些, 从而引出问题二.

问题二　有一张边长为1的正方形纸片, 现在要用它来裁剪一个圆锥的侧面与底面, 若侧面的裁剪方式如图3所示, 问如何裁剪才能使所得的圆锥的侧面积最大?

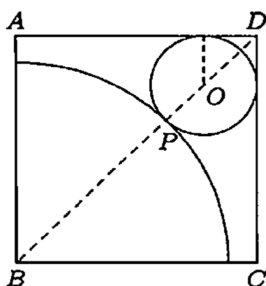


图3

分析: 设$\odot O$的半径为r, $\odot B$的半径为R, 则有$\sqrt{2}r+r+R=\sqrt{2}$, ①

$2\pi r=\frac{90}{180}\pi R=\frac{1}{2}\pi R$. ②

由②有$R=4r$, 代入①得$r=\frac{5\sqrt{2}-2}{23}$,

从而得$R=\frac{20\sqrt{2}-8}{23}$.

结论1　要在边长为1的正方形纸片上裁出一个最大侧面积的圆锥, 只要取底面圆半径为$r=\frac{5\sqrt{2}-2}{23}$, 母线长为$R=\frac{20\sqrt{2}-8}{23}$, 就可裁得符合条件的圆锥的表面展开图.

在正方形纸片上裁剪最大侧面积的圆锥问题解决之后, 很自然地又会让人思考: 如果是在长方形纸片上裁剪又当如何呢? 从而引出了问题三.

问题三　有一张长方形的纸片, 长为15, 宽为10, 现在用它来裁剪一个圆锥的侧面与底面, 若侧面的裁剪线如图4所示, 问能否在余料中裁出符合条件的底面圆?

分析: 设$\odot O$的半径为r. 如图添加辅助线, 易得$OF=10-r, BO=10+r, BF=15-r$.

$\therefore$ 在Rt$\triangle BFO$中, 有$(10+r)^2=(10-r)^2+(15-r)^2$, 整理得$r^2-70r+225=0$.

解得$r=35-10\sqrt{10}$.

$\therefore$ $\odot O$的周长$=2\pi r=2\pi(35-10\sqrt{10})=(70-20\sqrt{10})\pi$,

而弧AG的长度$\frac{90}{180}\pi\times 10=5\pi$.

$\therefore$ $\odot O$的周长大于弧AG的长度, 能裁出符合条件的圆.

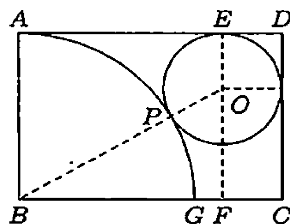


图4

虽然在问题三的长方形中能裁出符合条件的底面圆, 但是很显然材料太浪费了, 为了提高纸片的利用率, 从而引出了问题四.

问题四　长与宽满足怎样比例的长方形纸片刚好能裁出最大侧面积的圆锥, 使纸片的利用率最高?

分析: 设长方形的宽$AB=1$, 长$BC=b$, $\odot O$的半径为r, 则

$2\pi r=\frac{90}{180}\pi\times 1=\frac{1}{2}\pi$, $\therefore$ $r=\frac{1}{4}$.

又$\because$ 在Rt$\triangle BFO$中有

$(1+r)^2=(1-r)^2+(b-r)^2$,

即$\left(1+\frac{1}{4}\right)^2=\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(b-\frac{1}{4}\right)^2$,

整理得$16b^2-8b-15=0$, $\therefore$ $b=\frac{5}{4}$.

$\therefore$ 当长方形满足长与宽的比值为$\frac{5}{4}$时, 能裁出符合条件的圆锥.

结论2　当长方形纸片的长与宽满足长度之比为$\frac{5}{4}$时, 能在此长方形纸片上裁出最大侧面积的圆锥, 使纸片的利用率最高.

在数学教学中应用变式教学能不断提高学生解决问题的能力和应变能力, 是一种行之有效的教学方法. 在教师不断的反思过程中, 变式的思想就会自然地走进课堂教学中, 学生的思维、洞察力就能有效地提升, 课堂教学自然也会变大、变活、变深, 变得引人入胜、流连忘返, 更为重要的是, 学生从解题中获得了愉快的体验, 并接受到数学文化的熏陶.

例谈解题过程如何揭示数学的本质

200127 上海市浦东教育发展研究院 韩建宏

解题是数学教学中的重要环节，其在数学学习活动中有不可替代的重要地位，解题也是数学教育的一项任务. 通过解题可以促进人们对数学的理解，掌握数学核心内容，学会"数学地思维"，同时解题也是评价学习的重要方式.

笔者在平时听课时发现，在解题教学中如何揭示数学的本质难尽人意. 下面通过两个案例说明教学中如何揭示数学的本质.

一、教学中要呈现数学知识的内核

例1. "阿若卡塔游戏"的教学.

在学习数列时，教师先让学生玩"阿若卡塔游戏"：

现有中间带孔的圆木片，这些圆木片以从大到小的次序穿在一根竹竿A上，现在的任务是将这堆圆木片穿到其他一根竹竿(B或C)上，但必须遵循如下规则：

① 圆木片只能一一搬动；

② 大的木片只能放在小的木片下面；

③ 搬动的次数尽可能少.

现有4块圆木片组成的阿若卡塔，则至少移动______次能完成任务.

下面是关于该问题的一个"去数学化"的教学片断：

当教师提出该问题时，学生感到一片茫然. 有的学生马上进行手工操作，然后将操作次数记录下来，进行交流汇总，最后得到答案，从而结束了该问题的教学.

笔者认为，此题是有关递归方法学习的一道好题，教学中要把握好以下两个揭示数学本质的教学环节.

(1) *将该问题向递归方法迁移*

此问题似乎与递归方法毫无关系，但是让我们来分析一下之间的关系吧.

1块的时候当然需要用1次.

2块的时候需要用3次，如图1所示：

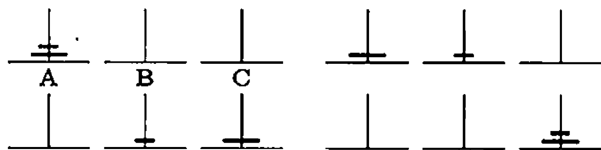


图 1

3块的时候需要用7次，如图2所示：

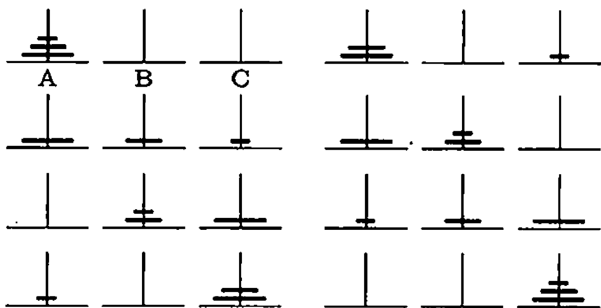


图 2

启发学生，移动3块可以先转化为移动2块，如图3所示：

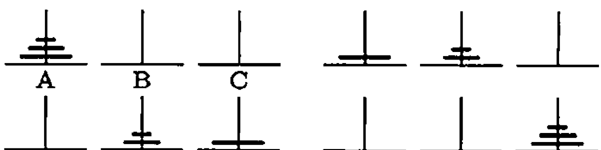


图 3

第一步：将两块木片从A移动到B，需要3次；

第二步：将剩下的最大的木片从A移动到C，需要1次；

第三步：再将两块木片从B移动到C，需要3次；

所以移动3块共需要7次.

移动4块的时候，可以转化成移动3块，如图4所示：

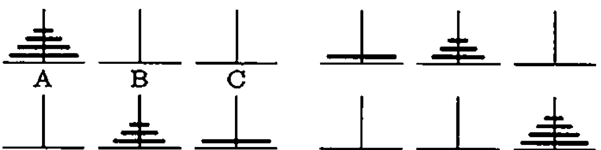


图 4

因此, 4块的时候需要用

"3个圆盘重新摞在一起的次数"+1次

+"3个圆盘重新摞在一起的次数"

=2×"3个圆盘重新摞在一起的次数"+1次

=15次.

记移动k块的时候所需的次数为$A(k)$, 则有

$A(4)=2A(3)+1=15$.

(2) 对该问题进行数学本质的揭示

本问题可抽象出如下数学本质:

移动k个的时候可以转化为移动$(k-1)$块:

$A(k)=2A(k-1)+1\,(k>2)$,

又$A(1)=1$,

利用递推关系可以求得$A(k)=2^k-1$.

二、解题时要用揭示数学本质的解法

例2　已知抛物线$y^2=2px\,(p>0)$的焦点为F, A为其准线上的一点, 线段AF的中垂线交x轴于点B, 点B到AF的距离等于$\frac{p}{3}$, 求点B的坐标.

教师常用的三种解法如下:

第一种: 设D为AF的中点, C为准线与x轴的交点, 画出图5分析.

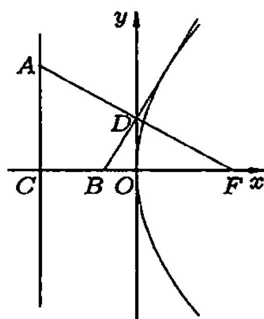


图5

可得$\triangle BDF\backsim\triangle ACF$,

得出$\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CF}=\frac{BF}{AF}$.

再设$A\left(-\frac{p}{2},t\right)$、$B(x,0)$, 代入上式计算可得$B\left(-\frac{p}{6},0\right)$.

第二种: 如图5, 设D为AF的中点, C为准线与x轴的交点.

在Rt$\triangle BDF$中, 有$DO^2=OF\cdot BO$, 再设$B(x,0)$, 代入上式计算可得$B\left(-\frac{p}{6},0\right)$.

第三种: $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, 设$A\left(-\frac{p}{2},t\right)$.

先求出$D\left(0,\frac{t}{2}\right)$, 再求出$BD$的方程$y-\frac{t}{2}=\frac{p}{t}x$, 再求出$B\left(-\frac{t^2}{2p},0\right)$.

利用点B到直线AF: $tx+py-\frac{tp}{2}=0$的距离等于$\frac{p}{3}$, 可求出$B\left(-\frac{p}{6},0\right)$.

上述三种解法中, 第一种方法涉及三角形相似, 第二种方法涉及射影定理, 而第三种没有. 尽管第三种方法运算量较前两种方法要多, 但它更加贴切地反映了"用代数的方法解决几何问题"的本质, 其中第一种方法和第三种方法计算过程是一致的, 第二种方法涉及的几何技巧较多. 第三种方法虽然计算较繁, 但它是一种通法, 反映了解析几何的本质, 思维量小, 简单易懂. 坚持用这种方法进行训练, 解决解析几何问题的能力定会提高.

数学是研究数量关系和空间形式的科学, 数学是用数来揭示自然规律的科学. 数学本质就是用数学的眼光认识世界, 揭示数学规律, 总结数学方法, 形成数学思想. 为此, 突出数学本质教学, 就是要求我们在教学过程中, 让学生理解数学概念, 把握数学思想; 感悟数学特有的数学思维方式. 所以, 我们要善于抓住数学的本质, 促进学生的数学理解, 培养学生的理性思维, 提高学生学习数学的兴趣.

参考文献

[1] 张晓东. 让他们在课堂中像儿童一样积极[J]. 数学通报, 2009 (6): 49-54.

[2] 龙正武. 例谈平面解析几何教学效率的提高[J]. 数学教学, 2011 (6): 10-14.

以面积法贯穿比例线段单元的教学

200060 上海市江宁学校 张德荣

在初中数学的学习中，以前教材在内容安排上往往较注重图形“形状”属性及相关应用，对图形的“面积”属性仅仅限于一般计算，没有进一步研究其应用价值，使得学生在解决问题时，常常不能用面积这一重要的本质属性去打开解题思路．事实上，用面积的属性去解决相关问题，体现在数学内容、数学学习的全过程中，尤其是在后续的高中、大学学习阶段，面积法的思想体现得更广泛．面积法是指利用有关面积的关系来解决数学问题的一种思想方法．借助面积法不但可证明各种几何图形中的面积关系，还可证某些线段相等以及线段之间的比例式等多种类型的几何问题．在上教版第二十四章“比例线段”单元教学中，面积法始终贯穿在其中，例题和作业中有许多问题的解决方法都渗透着面积法，突出了面积法作为一种数形结合的数学思想方法在数学学习中的重要作用．

一、在例题教学中渗透面积法，拓展学生思维

用面积法解题，在本单元中经常出现，有些看似与面积无关的问题，若用面积法可能使较为复杂的问题得以快捷的解决．用面积法解题，关键在于利用题目的特点，分析相应图形面积之间的关系，推出几何问题中相应的边角关系．

1. 利用面积法证明比例线段的关系式

例1　如图1，在$\triangle ABC$中有一点O，连结AO、BO、CO并延长分别与BC、CA、AB相交于点D、E、F，求证：$\dfrac{OD}{AD}+\dfrac{OE}{BE}+\dfrac{OF}{CF}=1$．

分析：结合图形，注意到求证式中的比值都含在两个相同底边的三角形中，故这三个比值均可化为三角形面积之比，从而可用面积法证明．

$\dfrac{OD}{AD}=\dfrac{O\text{到}BC\text{的距离}}{A\text{到}BC\text{的距离}}=\dfrac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}$．

同理$\dfrac{OE}{BE}=\dfrac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\dfrac{OF}{CF}=\dfrac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}$．

所以$\dfrac{OD}{AD}+\dfrac{OE}{BE}+\dfrac{OF}{CF}$

$$=\frac{S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

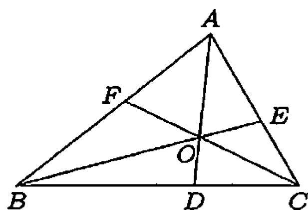


图1

例2　如上题的条件，证明：
$\dfrac{BD}{CD}\cdot\dfrac{CE}{AE}\cdot\dfrac{AF}{BF}=1$．

分析：注意到一个比值中的两条线段都在同一条直线上，就可想到用等高的三角形面积比来代替它们．如图1得$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle OCD}}$，用等比性质得

$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{S_{\triangle ABD}-S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle ACD}-S_{\triangle OCD}}=\dfrac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ACO}}$．

同理$\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{S_{\triangle BCO}}{S_{\triangle ABO}}$，$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle BCO}}$．

把三个式子相乘就得到结论．这就是塞瓦定理．

例3　如图2，在平行四边形$ABCD$中，P为对角线BD上一点，且$PE\perp AB$，$PF\perp BC$，垂足分别为E、F，求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{PF}{PE}$．

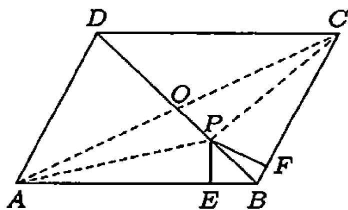


图2

分析：把比例式转化为乘积式$AB\cdot PE=BC\cdot PF$，再结合条件$PE\perp AB$，$PF\perp BC$，

很容易联想到$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}AB\cdot PE$, $S_{\triangle CPB}=\frac{1}{2}BC\cdot PF$. 连结$AC$、$AP$、$CP$, 由条件得$O$为$AC$的中点, $S_{\triangle ABO}=S_{\triangle CBO}$, $S_{\triangle APO}=S_{\triangle CPO}$, 所以$S_{\triangle APB}=S_{\triangle CPB}$, 可以证得结论.

抓住已知条件中垂直关系及结论中的四条线段正好与三角形的面积有关, 想到应用面积法解题.

例4 如图3, 平行四边形$ABCD$中, 点E、F分别为AD、AB上一点, 过C作$CP\perp BE$, $CQ\perp DF$, 垂足分别为P、Q. 求证: $\frac{CP}{DF}=\frac{CQ}{BE}$.

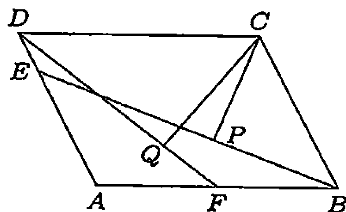


图3

分析: 把结论中的四条线段写成乘积式, 就比较容易联想到用面积法解题, 而$\triangle CBE$和$\triangle CDF$的面积都等于平行四边形面积的一半, 结论就可以得证.

例5 如图4, 已知$\triangle ABC$中AD平分$\angle BAC$, 交BC于D, 求证: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$.

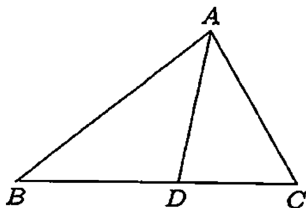


图4

分析: 由结论中的$\frac{BD}{CD}$想到$\frac{BD}{CD}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}$, 而$\triangle ABD$、$\triangle ACD$在$AB$、$AC$边上的高就是点$D$到$\angle BAC$的两边的距离, 由角平分线的性质可知点$D$到$\angle BAC$的两边的距离相等, 得到$\frac{AB}{AC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}$, 即可得到结论, 这就是运用面积法证明角平分线性质定理的思路.

利用面积的概念及有关性质, 根据图形特点, 可以将线段比转化为面积比来处理, 就能比较简单地解决复杂的几何问题.

2. 利用面积法证明线段相等

根据等高的两个三角形的面积之比等于对应底边的比的性质, 通过证明等高的两个三角形的面积相等, 可以证明对应的底边相等.

例6 如图5, P是$\triangle ABC$中$\angle BAC$平分线上的任一点, 过C作$CE/\!/PB$, 交AB延长线于E, 过B作$BF/\!/PC$, 交AC延长线于F, 求证: $BE=CF$.

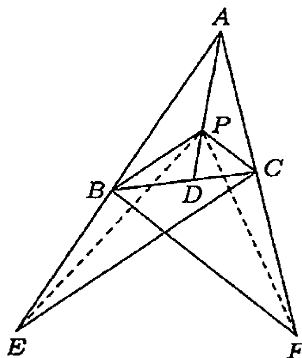


图5

分析: 由于点P在$\angle BAC$平分线上, 而BE、CF同时在这个角的两边上, 所以P到BE、CF的距离相等, 要证$BE=CF$, 可以联想到连结PE、PF, 再证明$S_{\triangle PBE}=S_{\triangle PCF}$. 由$CE/\!/PB$可得$S_{\triangle PBE}=S_{\triangle PBC}$.

同理$S_{\triangle PCF}=S_{\triangle PBC}$.

因此得到$S_{\triangle PBE}=S_{\triangle PCF}$, 进而可以证明结论成立.

例7 如图6, 在$\triangle ABC$中, $DE/\!/BC$, 交AB于D, 交AC于E, $AF/\!/EB$, 交BC于F, $AG/\!/DC$, 交BC于G, 求证: $BF=CG$.

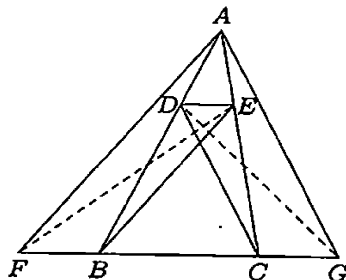


图6

分析: 通过观察图形, 连结EF、DG, 由于$\triangle EBF$和$\triangle DCG$是等高的两个三角形, 要证$BF=CG$, 只要证明$S_{\triangle EBF}=S_{\triangle DCG}$. 由$AF/\!/EB$可得$S_{\triangle EBF}=S_{\triangle ABE}$.

同理$S_{\triangle DCG}=S_{\triangle ACD}$.

由$DE/\!/BC$得$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDE}$, 同加上$S_{\triangle ADE}$可得$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ACD}$,

所以得到$S_{\triangle EBF}=S_{\triangle DCG}$, 根据如果等高的两个三角形面积相等, 那么它们对应的底边相等, 可证明结论成立.

3. 利用面积法求线段的比值

前面已经提到运用面积法证明比例线段的关系式, 在比例线段这个单元中有许多求线段的比值问题, 在这类问题中也可以运用面积法来解决.

例8 如图7, 在$\triangle ABC$中, 点D为BC的中点, 点F为AD的中点, BF交AC于E, 求$\frac{AE}{EC}$的值.

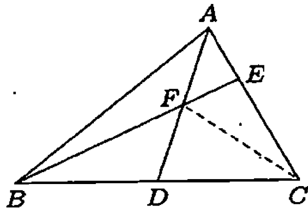


图7

分析: 本题一般解法就是添设平行线运用平行线分线段成比例定理来解. 观察图形, 连结CF, 可想到运用面积法把求$\frac{AE}{EC}$的值转化为求$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle CEF}}$的值, 由点$D$、$F$是中点, 可以得到

$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle CDF}=S_{\triangle ABF}=S_{\triangle ACF}$.

设这四个三角形的面积为S, $S_{\triangle CEF}=x$, 则$S_{\triangle AEF}=S-x$, 由$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABF}}=\frac{EF}{BF}=\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CBF}}$, 得到方程$\frac{S-x}{S}=\frac{x}{2S}$, $x=\frac{2}{3}S$, 即$S_{\triangle CEF}=\frac{2}{3}S$, $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{3}S$, 所以$\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}$.

由此题可以看出求线段的比值问题可以运用面积法转化为用代数方法来解决, 此题条件可以更一般化, 但解题思路不变, 如下例.

例9 如图8, 在$\triangle ABC$中, 点D为BC上一点, 且$BD=2CD$, 点E为AC上一点, 且$AE=EC$, AD、BE交于点F, 求$\frac{AF}{DF}$、$\frac{BF}{EF}$的值.

分析: 同例8思路一样, 把求线段的比值转化为求面积的比值, 连结CF, 由已知可得$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle CEF}$, $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle BCF}$, $\frac{S_{\triangle CDF}}{S_{\triangle BDF}}=\frac{1}{2}$. 设$S_{\triangle CDF}=S$, $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle CEF}=x$, 则$S_{\triangle ABF}=3S$, $S_{\triangle BDF}=2S$, 得$\frac{AF}{DF}=\frac{3}{2}$.

因为$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{1}{2}$, 得到方程$\frac{2x+S}{5S}=\frac{1}{2}$, 解得$x=\frac{3}{4}S$, 所以$\frac{BF}{EF}=\frac{3S}{\frac{3}{4}S}=4$.

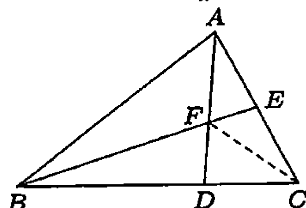


图8

用面积法来解几何题, 几何元素之间关系变成数量之间的关系, 只需要计算, 有时可以不添置辅助线, 即使需要添置辅助线, 也很容易考虑到.

4. 利用面积法证直线平行

在运用面积法解题时, 经常借助于平行线进行等积变换, 反之, 也可以通过面积相等来证明直线平行.

例10 如图9, 在$\triangle ABC$中, AD为BC边上的中线, 点M为AD上任一点, 过点M作一直线分别交AB、AC于E、F, 若$ME=MF$, 求证: $EF/\!/BC$.

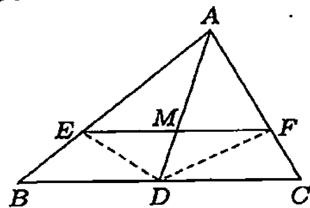


图9

分析: 要证明平行实际上只要证明$\frac{BE}{AE}=\frac{CF}{AF}$, 可以把线段的比转化为面积比. 连结$DE$、$DF$, 根据$ME=MF$, $BD=CD$可得, $S_{\triangle AEM}=S_{\triangle AFM}$, $S_{\triangle DEM}=S_{\triangle DFM}$, $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$, 所以$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDF}$, 得$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{S_{\triangle DFC}}{S_{\triangle ADF}}$, 所以可证得$\frac{BE}{AE}=\frac{CF}{AF}$,

于是得$EF/\!/BC$.

例11 如图10, 梯形$ABCD$中, $AB/\!/CD$, 点E在BC上, 点F在AD上, 且$AE/\!/FC$, 连结DE、BF, 求证: $DE/\!/BF$.

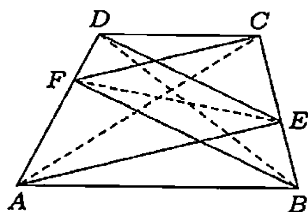


图 10

分析: 因为题中有两组平行线, 一定有许多面积相等的三角形, 可以运用等积变换, 证明$S_{\triangle BED}=S_{\triangle DFE}$, 达到证明$DE/\!/BF$的目的.

连结AC、BD、EF,由$AE/\!/FC$可得$S_{\triangle ACF}=S_{\triangle ECF}$, 同加上$S_{\triangle DCF}$得$S_{四边形ECDF}=S_{\triangle ACD}$. 由$AB/\!/CD$可得$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}$, 得$S_{\triangle BCD}=S_{四边形ECDF}$, 同减去$S_{\triangle DCE}$, 得到$S_{\triangle BED}=S_{\triangle DFE}$, 从而证得结论.

二、在作业设计中关注面积法, 促进学生理解

在定理探究和例题教学渗透面积法的同时, 作业设计中还要关注面积法的运用, 促进学生对面积法的理解. 作业设计中可以多途径地关注面积法运用, 包括以下几个方面:

1. 用面积法去探究一些重要的定理. 通过上面的分析知道可以运用面积法证明平行, 请同学思考运用面积法证明三角形中位线定理; 运用面积法探究三角形内角平分线定理和外角平分线定理, 运用面积法证明塞瓦定理和梅涅劳斯定理等, 通过对这些定理的探究, 建立面积比和线段比之间的联系, 让学生体验两者相互转化的过程.

2. 有许多证明比例线段或线段相等的问题可以运用面积法解决, 在作业设计时, 可引导学生多角度思考问题, 寻找尽可能多的解题方法, 拓展学生的思维.

3. 对以上例8、例9运用面积法求线段比值的思路, 可以适当变换条件进行变式训练, 促进学生掌握这类问题的基本解题方法.

4. 引导学生对运用面积法解决问题的思路进行反思小结, 归纳解题的思路, 提炼解题方法, 促进对面积法的理解.

通过"比例线段"单元中面积法的应用分析, 初步感悟到面积法在初中数学应用中的广泛性和重要性. 当然这里突出分析面积法的应用, 并不是要削弱相似法的作用, 只是想说明初中数学学习中面积法与相似法一样, 也是从图形本质属性出发的一种解决问题的重要策略.

参考文献

[1] 沈文选. 平面几何证明方法全书[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2005.

[2] 彭翕成, 张景中. 仁者无敌面积法[M]. 上海: 上海教育出版社, 2011.

[3] 叶锦义. 中考数学解题指导与训练[M]. 上海: 上海社会科学院出版社, 2003.

(上接第5-5页)

(2) 在整个学习活动中, 从发现问题、提出问题到解决问题, 始终以学生的思维活动为主线, 教师只是适时引导、合作探究, 充分体现了学生的主体地位.

(3) 通过本节课及课后的探究学习活动, 学生不仅获得了完美的结论, 对圆锥曲线的几何性质及内在联系有了更为深刻的认识和了解, 更重要的是体验了研究过程和方法. 尤其是在问题的探究过程中学生曾采用描出部分点的方法给出轨迹不是椭圆和取两个点判断角不相等的结论也是非常好的, 否定一个结论只需举一个反例或部分否定即可. 在探究活动中否定和肯定同样重要, 因为及时的否定可以避免在错误的方向上浪费更多的资源.

(4) 虽然所述探究性学习活动得益于学生偶发的"灵感"和"好奇心", 但若教师经常有意去捕捉这些"灵感"和"好奇心", 并加以积极引导, 就会激发学生提出问题和探究问题的欲望, 养成反思的好习惯, 学生就会因此而常怀"好奇心"、常现"灵感". 学生发现和提出问题的能力就会不断提高, 学生的学习方式也会从多练、多记转向多思、多问. 若从培养创新能力的角度看, 提出问题比解决问题更有意义. 因此, 学生的创新能力也会得到发展.

改路问题

221300　江苏省运河高等师范学校　徐　峰

一、问题

如图1, 王家和李家相邻, 在他们两家之间有一条小路连接前后两条大路, 小路两侧的土地分属两家所有, 但小路的方向与两家的房屋方向不一致, 于是两家商量将小路的方向改成和房子的方向一致. 当然, 改路后还要保持两家原来的土地面积不变. 应当如何改路呢?

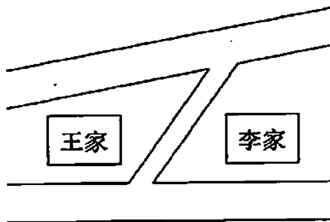


图 1

二、建模

上面的问题我们可以用下面的数学问题来描述.

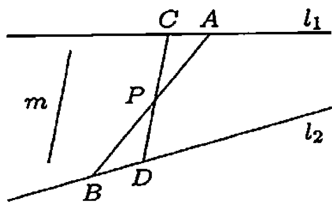


图 2

如图2, m,l_1,l_2为已知直线, A和B分别在直线l_1和l_2上, 且AB与m不平行. 试在线段AB上求一点P, 满足: 过P作直线m的平行线, 分别交l_1和l_2于C和D, 使得$S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBD}$.

三、探求

首先, 如果$l_1/\!/l_2$, 这种情况很简单, 只要取AB的中点作为P点就可以了.

下面我们考虑l_1与l_2相交的情况.

如图3, 设l_1与l_2相交于O点. C和D分别在直线l_1和l_2上, 且$CD/\!/m$, CD与AB相交于P. 过O作直线$q/\!/m$, 分别过A,B,C,D作q的垂线, 垂足分别是A_1,B_1,C_1,D_1, 记$AA_1=a$, $BB_1=b$, 设P点到q的距离为x, 则$CC_1=DD_1=x$.

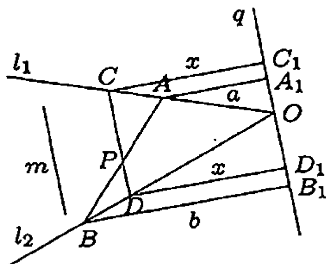


图 3

要使$S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBD}$, 只须$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OCD}$即可. 由图可知

$S_{\triangle OAB}=S_{梯形ABB_1A_1}-S_{\triangle OAA_1}-S_{\triangle OBB_1}=\frac{1}{2}(a+b)\cdot A_1B_1-\frac{1}{2}a\cdot OA_1-\frac{1}{2}b\cdot OB_1=\frac{1}{2}(a+b)\cdot(OA_1+OB_1)-\frac{1}{2}a\cdot OA_1-\frac{1}{2}b\cdot OB_1=\frac{1}{2}(b\cdot OA_1+a\cdot OB_1)$, $\cdots$(1)

$S_{\triangle OCD}=S_{矩形CDD_1C_1}-S_{\triangle OCC_1}-S_{\triangle ODD_1}=x\cdot C_1D_1-\frac{1}{2}x\cdot OC_1-\frac{1}{2}x\cdot OD_1=x\cdot(OC_1+OD_1)-\frac{1}{2}x\cdot OC_1-\frac{1}{2}x\cdot OD_1=\frac{1}{2}x\cdot(OC_1+OD_1)$. $\cdots\cdots$(2)

因为$AA_1/\!/CC_1$, 所以$\frac{OC_1}{OA_1}=\frac{x}{a}$, $OC_1=\frac{x}{a}\cdot OA_1$, 又因为$BB_1/\!/DD_1$, 所以$\frac{OD_1}{OB_1}=\frac{x}{b}$, $OD_1=\frac{x}{b}\cdot OB_1$, 代入(2)式得:

$$\begin{aligned}S_{\triangle OCD}&=\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{a}\cdot OA_1+\frac{x}{b}\cdot OB_1\right)\\&=\frac{x^2}{2ab}(b\cdot OA_1+a\cdot OB_1)\\&=\frac{x^2}{ab}S_{\triangle OAB}.\end{aligned}$$

要使$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OCD}$, 只须$x^2=ab$, 即$x=\sqrt{ab}$, 亦即$P$点到$q$的距离为$\sqrt{ab}$.

四、作图

曲线系: 从知识点还原到研究工具

430079 华中师范大学教育信息技术工程研究中心 徐章韬

1. 引言

"问题——工具——解"是推动数学发展的重要方式. 当问题得到解决后, 解决问题的工具便凝固于教科书中, 成了知识点. 例如, 在解决求曲线的切线及曲线围成面积的过程中, 人们发展了无穷小分析的研究方法, 极限成了人们解决新问题的一种重要工具. 然而, 当这些知识成熟, 走进教科书之后, 学习者就把它们当作知识点来看待, 不再把它们看作一种研究工具了. 如果不把它们当作知识点而作为一种研究工具来看待, 则别有一番天地.

2. 样例

例1 (2005年全国高考湖北卷理科数学第21题) 设A、B是椭圆$3x^2+y^2=\lambda$上的两点, 点$N_0(1,3)$是线段AB的中点, 线段的垂直平分线与椭圆相交于C、D两点. (1) 确定λ的取值范围, 并求直线AB的方程; (2) 试判断是否存在这样的λ, 使得A、B、C、D四点在同一圆上, 并说明理由.

先看此题的解法. 根据点差法, 不难求得直线AB的方程为$x+y-4=0$, 直线CD的方程为$x-y+2=0$, 过点A、B、C、D的曲线系方程可设为$3x^2+y^2-\lambda+\mu(x+y-4)(x-y+2)=0$, 整理得$(3+\mu)x^2+(1-\mu)y^2-2\mu x+6\mu y-\lambda-8\mu=0$, 欲使$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆, 应有$3+\mu=1-\mu$, 解得$\mu=-1$, 从而上述方程简化为$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{\lambda-3}{2}$, 当$\lambda>3$时, 即可构成一个圆, 结合第(1)问的$\lambda$值, 可得到$\lambda>12$.

此题可以推广, 在解决推广问题的过程中可以看到把曲线系看作研究工具的优越性.

① 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 点$N(x_0,y_0)$是椭圆内一点, AB是椭圆的以点N为中点的弦, 线段AB的垂直平分线交椭圆于C、D两点, 当满足$b^4x_0^2=a^4y_0^2$且$y_0^2<\frac{(a^2+b^2)b^4}{(a^2-b^2)^2}$时, A、B、C、D四点共圆. 圆的方程是

由于P点q到的距离为$\sqrt{ab}$, 所以能使用尺规准确地作出P点. 可以采取下面的作法:

图 4

(1) 过B作直线BE垂直于直线q, 垂足为E, 过A作直线AF垂直于BE, 垂足为F;

(2) 以BF为直径作圆, 圆心为M, 以ME为直径作圆, 圆心为N;

(3) 设G为圆M和圆N的一个交点, 以E为圆心, EG为半径作圆, 此圆与BE交于H;

(4) 过H作直线r平行于q, r与AB的交点为P, 则P为所求(如图4).

五、证明

如图4, 连结MG和EG, 因为ME为圆N的直径, 所以$EG\perp MG$, 从而EG是圆M的切线, 由圆的切割线定理得, $EG^2=EF\cdot EB$, 由作法可知, $EF=a$, $EB=b$, 即$EG^2=ab$, 也有$EH^2=ab$, 又因为$r/\!/q$, 所以P到q的距离等于EH, 即P到q的距离为$\sqrt{ab}$.

参考文献

[1] 王宪昌. 数学思维方法[M]. 北京: 人民教育出版社, 2002.

$$\left(x-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0\right)^2+\left(y+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0\right)^2=\frac{2a^2[(a^2+b^2)b^4-(a^2-b^2)^2y_0^2]}{(a^2+b^2)^2b^2}.\cdots\cdots(*)$$

② 设$N(x_0,y_0)$是抛物线$y^2=2px\,(p>0)$内的一点，AB是抛物线的以点N为中点的弦，线段AB的垂直平分线交抛物线于C、D两点，当满足$|y_0|=p$时，A、B、C、D四点共圆，圆的方程是$[x-(x_0+2p)]^2+(y+y_0)^2=6p^2+4p$.

③ 设$N(x_0,y_0)$，AB是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a\neq b,\ a、b>0)$的以点$N$为中点的弦，线段$AB$的垂直平分线交双曲线于$C$、$D$两点，当满足$b^4x_0^2=a^4y_0^2$且$y_0^2>\frac{(a^2-b^2)b^4}{(a^2+b^2)^2}$时，$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆，圆的方程是

$$\left(x-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0\right)^2+\left(y+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}y_0\right)^2=\frac{2a^2[(a^2+b^2)y_0^2-(a^2-b^2)^2b^4]}{(a^2-b^2)^2b^2}.\cdots\cdots(**)$$

为了看清楚研究工具对引申、推广的重要性，我们证明③.

易得直线AB的方程为$b^2x_0x-a^2y_0y+a^2y_0^2-b^2x_0^2=0$，直线$CD$的方程为$a^2y_0x+b^2x_0y-(a^2+b^2)x_0y_0=0$，则过$A$、$B$、$C$、$D$四点的曲线系为:

$$b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2-\lambda(b^2x_0x-a^2y_0y+a^2y_0^2-b^2x_0^2)[a^2y_0x+b^2x_0y-(a^2+b^2)x_0y_0]=0,$$

整理得

$$(b^2-\lambda a^2b^2x_0y_0)x^2+(-a^2+\lambda a^2b^2x_0y_0)y^2+\lambda(a^4y_0^2-b^4x_0^2)xy+\lambda[(a^2+b^2)b^2x_0^2y_0-(a^2y_0^2-b^2x_0^2)a^2y_0]x+\lambda[-(a^2+b^2)a^2x_0y_0^2+(b^2x_0^2-a^2y_0^2)b^2x_0]y+\lambda(a^2y_0^2-b^2x_0^2)(a^2+b^2)x_0y_0-a^2b^2=0.$$

欲使A、B、C、D四点共圆，显然应有$b^4x_0^2-a^4y_0^2=0$（消去xy交叉项），$b^2-\lambda a^2b^2x_0y_0=-a^2+\lambda a^2b^2x_0y_0$（$x^2$与$y^2$的系数相等），最后上式化简成

$$\left(x-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0\right)^2+\left(y+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}y_0\right)^2=\frac{2a^2[(a^2+b^2)y_0^2-(a^2-b^2)^2b^4]}{(a^2-b^2)^2b^2}.$$

曲线系的观点和方法统一、简洁.更有趣的是，还能沟通虚实之间的联系. 视$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$为一个虚椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(bi)^2}=1$，在(*)用$bi$代替$b$，竟然能得到(**)，真是虚实相生!

例2 （2011年全国高考大纲卷第21题）已知O为坐标原点，点F为椭圆C：$x^2+\frac{y^2}{2}=1$在y轴正半轴上的焦点，过点F且斜率为$-\sqrt{2}$的直线l与C交于A、B两点，点P满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{0}$. (1)证明：点$P$在$C$上；(2)设点$P$关于点$O$的对称点为$Q$，证明：$A$、$P$、$B$、$Q$四点在同一圆上.

分析与解：不难求得直线AB的方程是$\sqrt{2}x+y-1=0$，点P的坐标是$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，点$Q$的坐标是$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$PQ$的方程是$y=\sqrt{2}x$，过$A$、$P$、$B$、$Q$四点的曲线系方程可设为

$$x^2+\frac{y^2}{2}-1+\lambda(\sqrt{2}x+y-1)(\sqrt{2}x-y)=0,$$

整理得

$$(2\lambda+1)x^2+\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)y^2-\sqrt{2}\lambda x+\lambda y-1=0.$$

由$2\lambda+1=\frac{1}{2}-\lambda$，解得$\lambda=-\frac{1}{6}$，从而圆的方程是$\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{129}{64}$，从而$A$、$P$、$B$、$Q$四点共圆.

引入曲线系的意义不仅仅在于简化解法，更在于表达一种以有限驾驭无限的类似于基向量的想法.曲线系是具有某种共同性质的所有曲线的集合，常用含有参数的方程来表示. 曲线系中虽有无数条曲线，但具有“基底曲线”作用的曲线却只有有限条，通过这些“基底曲线”就可以生成、把握无数条曲线，这是一种很经济的想法.这些“基底曲线”有如直线上的两个“基点”.在线段的定比分点、平面向量基本定理和空间向量基本定理中，这种思想均有体现.在教学时，在这些地方不妨“微言要义”，让学生的思想更活跃一些.

研究表明，观念上的改变是困难的，也是最重要的.知识原本是激发我们思考的一种载体，而不能当作一种纯粹的凝固的信息来接受.

对不等式$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$的新认知

313012 浙江省湖州市双林中学 李建潮 313000 浙江省湖州市第五高级中学 计惠方

导数"下放"后，高中数学里有下面的不等式:
$\frac{x}{1+x}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x\,(x>-1)$.
本文将谈谈我们对它的新认识.

一、加强

首先将上面的对数基本不等式加强为:

定理 当$x\in(0,+\infty)$时,
$$\frac{x}{1+\frac{1}{2}x}\overset{(1)}{<}\ln(1+x)\overset{(2)}{<}\frac{x}{\sqrt{1+x}};$$
当$x\in(-1,0)$时,
$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}\overset{(3)}{<}\ln(1+x)\overset{(4)}{<}\frac{x}{1+\frac{1}{2}x}.$$

证明: 令$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}-\ln(1+x),x\in(-1,+\infty)$, 则
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{1+x}$$
$$=\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\geqslant 0.$$
(当且仅当$x=0$时取"="号), 所以$f(x)$在$(-1,+\infty)$上是增函数. 于是

当$x\in(0,+\infty)$时, $f(x)>f(0)=0$,
即$\ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$;
当$x\in(-1,0)$时, $f(x)<f(0)=0$,
即$\ln(1+x)>\frac{x}{\sqrt{1+x}}$.
(2)与(3)两式获证.

再令$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+\frac{1}{2}x},x\in(-1,+\infty)$类似可证得(1)与(4)两式, 从而定理获证.

对于数列问题, 在定理的(1)与(2)式中令$x=\frac{1}{n}$, 可得

推论1 对任意的$n\in\mathbf{N}^*$, 有
$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\overset{(5)}{<}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\overset{(6)}{<}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

二、应用

1. 几个相关不等式

利用推论1可直接得到以下两个不等式:

例1 对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$, 有
$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\ln(n+1),\quad\cdots(7)$$
$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}>\ln(n+1),\quad\cdots(8)$$

注意到$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\,(n\in\mathbf{N}^*)$, 所以由(8)式得
$$-\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2(n+1)}>\ln(n+1).$$
由此得

推论2 对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$, 有
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}.\quad\cdots(9)$$

显然, 由这样的放缩得到的推论2其精确度是很高的. 若再与构造单调数列相结合, 则还可获如下相关不等式:

例2 对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$, 有
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)+\frac{5}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2(n+1)},\quad\cdots(10)$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln(n+1)+\frac{37}{60}-\frac{1}{n+1}+\frac{39}{20(4n+5)}.\quad\cdots(11)$$

证明: 令$f(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$, 则
$$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}}$$
$$=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$
$$>\frac{1}{2(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)},$$

即 $f(n)+\frac{1}{2(n+1)}<f(n+1)+\frac{1}{2(n+2)}$,

所以 $\left\{f(n)+\frac{1}{2(n+1)}\right\}$ 是递增数列. 于是, 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 有

$$f(n)+\frac{1}{2(n+1)}\geqslant f(1)+\frac{1}{2\times 2}$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4},$$ 即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}+\frac{5}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2(n+1)}$$
$$>\ln(n+1)+\frac{5}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2(n+1)}$$ (用(8)式), 即(10)式获证.

再令 $g(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$, 并用真分数性质: $\frac{b}{a}\geqslant\frac{b-m}{a-m}$ (其中 $a\geqslant b>m>0$), 有 $g(n+1)-g(n)=\frac{1}{n+\frac{3}{2}}-\frac{1}{n+2}$

$$=\frac{1}{2\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{15}\frac{\frac{5}{2}\times 3}{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)}$$
$$\geqslant\frac{1}{15}\frac{\frac{15}{2}-\frac{3}{16}}{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)-\frac{3}{16}}$$
$$=\frac{39}{80\left(n+\frac{5}{4}\right)\left(n+\frac{9}{4}\right)}$$
$$=\frac{39}{20(4n+5)}-\frac{39}{20(4n+9)},$$

类似于(10)式的证明, 并用(7)式, 可证:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\frac{1}{2}}-\frac{23}{60}+\frac{39}{20(4n+5)}$$
$$<\ln(n+1)-\frac{23}{60}+\frac{39}{20(4n+5)},\qquad\cdots\cdots(12)$$

可化为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\ln(n+1)+\frac{37}{60}-\frac{1}{n+1}+\frac{39}{20(4n+5)},$$

即(11)式获证.

注: (10)式、(11)式左边的"上界"和"下界"的差为:

$$\frac{37}{60}-\frac{5}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}+\frac{39}{20(4n+5)}$$
$<\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{19}{30}=0.07377\cdots$. 可见, 用(10)式、(11)式来求数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的前 n 项和的整数部分是再合适不过的了.

2. 与推论1相关的不等式

作为推论1的(5)式, 我们还有如下结论:

例3 设 a 为正数, 则对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 不等式 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n+a}$ $\cdots\cdots(13)$

恒成立的最大的 a 值为 $\frac{1}{\ln 2}-1$.

证明 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n+a}\ (n\in\mathbf{N}^*)$

$$\Longleftrightarrow a\leqslant\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\ (n\in\mathbf{N}^*).\cdots(14)$$

为此引入函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$, 则

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}$$
$$<-\frac{1}{(1+x)\frac{x^2}{1+x}}+\frac{1}{x^2}=0$$ (用(2)式).

所以 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上是减函数, 特别地, 当 $x\in(0,1]$ 时, $f(x)_{\min}=f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$.

于是(14)式恒成立当且仅当

$$a\leqslant\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\Big|_{n=1}=\frac{1}{\ln 2}-1.$$

例3得证. 由此易获如下相关不等式:

例4 设 $a=\frac{1}{\ln 2}-1$, 则有

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}+\frac{1}{3+a}+\cdots+\frac{1}{n+a}\geqslant\ln(n+1),\qquad\cdots\cdots(15)$$

当且仅当 $n=1$ 时取"="号.

3. 一道全国联赛题及其加强

2009年全国高中数学联赛加试题二: 对于

任意的$n\in\mathbf{N}^*$, 证明 $-1<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}\leqslant\frac{1}{2}$.

利用推论1容易改进以上"上界"与"下界".

3.1 上界的加强

对任意的$n\in\mathbf{N}^*$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n\leqslant\frac{1}{8}+\frac{15}{8(4n+1)},\cdots(16)$$

证明: 令(16)式的左边为$f(n)$, 则由推论1的(5)式及真分数性质, 有 $f(n)-f(n+1)$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1+\frac{1}{n+1}}$$

$$>\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}$$

$$\geqslant\frac{1}{6}\cdot\frac{3-\frac{3}{16}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)-\frac{3}{16}}$$

$$=\frac{15}{32\left(n+\frac{1}{4}\right)\left(n+\frac{5}{4}\right)}$$

$$=\frac{15}{8(4n+1)}-\frac{15}{8(4n+5)}.$$

仿照(11)式的证明, 可得

$$f(n)-\frac{15}{8(4n+1)}\leqslant f(1)-\frac{3}{8}=\frac{1}{8},$$

移项, (16)式获证.

3.2 下界的加强

对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$, 有 $f(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}$

$$-\ln n\geqslant-\frac{11}{48}+\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{8n(n+1)}.\cdots\cdots(17)$$

证明: 由推论1的(6)式, 有

$$f(n)-f(n+1)$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1+\frac{1}{n+1}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}-\frac{1}{n+1+\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right]+\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{n+\frac{1}{2}-\sqrt{n(n+1)}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n(n+1)}}+\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n(n+1)}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{n(n+1)}\right]}+\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)$$

$$<\frac{1}{4\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n(n+1)}\cdot2\sqrt{n(n+1)}}+\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)n(n+1)}+\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{4n(n+1)(n+2)}+\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right),$$

化为 $f(n)-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{8n(n+1)}$

$$<f(n+1)-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}-\frac{1}{8(n+1)(n+2)},$$

据此可得

$$f(n)-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{8n(n+1)}$$

$$\geqslant f(1)-\frac{2}{3}-\frac{1}{8\times1\times2}=-\frac{11}{48},$$

移项, (17)式得证.

我们已经得到$f(n)>-\frac{11}{48}$(大于$-\frac{1}{4}$), 这无疑比"赛题"的下界"-1"要精确得多, 但如若以上构造"差分"的方法更合理, 则势必得到的下界要更精确.下面的结论便能说明这一点.

对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$, 有 $f(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}$

$$-\ln n\geqslant\frac{9}{10}-\ln3+\frac{n}{n^2+1},\cdots\cdots(18)$$

当且仅当$n=3$时取"="号.

简证: 容易验证当$n=1,2$时(18)式成立; 当$n\geqslant3$时, 由推论1的(6)式, 有

关于正多边形的一个有趣的轨迹问题

401249　重庆市长寿龙溪中学　吴　波

文[1]中聂柏琴老师对正多边形提出一个猜想如下:

猜想　凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形 $(n\geqslant 3)$. 在正 n 边形的内部满足

$$\angle QA_1A_2+\angle QA_2A_3+\cdots+\angle QA_{n-1}A_n+\cdots+\angle QA_nA_{n+1}=\frac{n-2}{2}\pi \qquad (1)$$

的点 Q 的轨迹是正 n 边形的 n 条对称轴在正 n 边形内的部分 (约定 $A_{n+1}=A_1$).

其中 $n=3$ 时的情形为2000年国家集训队测试题, $n=4$ 时的情形为文[1]所证明. 本文在一般情形下, 求得了满足 (1) 式的点 Q 的轨迹, 结果如下:

定理1　设凸正 n 边形的顶点 A_1、A_2、$\cdots$、$A_n(n\geqslant 3)$ 按逆时针方向排列, 点 O 为其中心, 点 M_i 为边 A_iA_{i+1} 的中点 $(i=1,2,\cdots,n)$, $\angle QA_kA_{k+1}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$ 为有向角且约定以顺时针方向为正, 则满足 (1) 式的点 Q 的轨迹为线段 OA_1、OA_2、$\cdots$、OA_n (但不含顶点 A_i) 和射线 OM_1、OM_2、$\cdots$、OM_n.

我们使用复数工具. 知 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{n}\pi}$, 则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k}{n}\pi}=w^k$ $(k\in\mathbf{N}^*)$.

先给出几个引理.

引理1　对任意 $z\in\mathbf{C}$, 有 $(z-w)(z-w^2)\cdot\cdots\cdot(z-w^n)=z^n-1$ 恒成立.

证明: 显然 w、w^2、$\cdots$、w^n 是1的 n 个 n 次单位根, 则由多项式理论知上式恒成立.

引理2　$ww^2\cdot\cdots\cdot w^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\pi}$ (证略).

引理3　$w-1=2\sin\frac{\pi}{n}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)}$.

证明:
$$\begin{aligned}w-1&=\cos\frac{2}{n}\pi-1+\mathrm{i}\sin\frac{2}{n}\pi\\&=-2\sin^2\frac{\pi}{n}+2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\\&=2\sin\frac{\pi}{n}\left(-\sin\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{n}\right)\\&=2\sin\frac{\pi}{n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)\right]\\&=2\sin\frac{\pi}{n}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)}.\end{aligned}$$

定理1的证明: (i)纯粹性 当点 Q 在线段 OA_i (但不在顶点 A_i) 或线段 OM_i 上时, 由正多边形的对称性易证 Q 满足 ① 式. 当点 Q 在射线 OM_i 上且在正 n 边形外时, 我们以下面的正五边形为例来证明此时的 Q 也满足 (1) 式.

不妨设点 Q 在射线 OM_3 上且在正五边形外, 如图1所示. 此时我们将 (1) 式左边中的五个角按其顶点关于 OM_3 对称这个关系配成三对:

$$\begin{aligned}&f(n)-f(n+1)\\&=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\\&<\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}-\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\\&<\frac{1}{n+\frac{1}{n}}-\frac{n+1}{(n+1)^2+1},\end{aligned}$$

化为

$$f(n)-\frac{n}{n^2+1}<f(n+1)-\frac{n+1}{(n+1)^2+1}.$$

据此, 不难知道当 $n\geqslant 3$ 时 (18) 式成立. 故 (18) 式获证.

由 (18) 式易知:

$f(n)>\frac{9}{10}-\ln 3=-0.198612289\cdots$ (大于 $-\frac{1}{5}$) $(n\in\mathbf{N}^*)$,

可见 (18) 式比定理 (17) 式更精确.

最后需要指出的是: 由于本文的不等式加强了文首 (常态下的) 对数基本不等式, 因而使我们原本认知的相关不等式 (在很大程度上) 得以 (很精确的) 相关的加强; 这不仅体现在数学竞赛与初数研究中, 而且已涉及高考 (例如: 推论2就是2010年湖北理科的压轴题)、对高等数学的研究 (本文的诸多结论皆能说明这一点) 等, 但愿拙文为此开个先例.

$\angle QA_3A_4$ 与 $\angle QA_4A_5$、$\angle QA_2A_3$ 与 $\angle QA_5A_1$、$\angle QA_1A_2$ 与其自身.

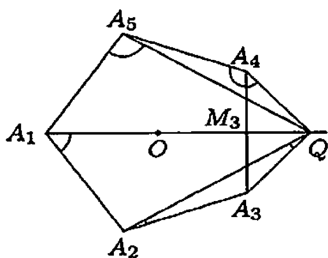


图 1

由对称性知: $\angle QA_3A_4 = -\angle QA_4A_3$
$= \angle A_3A_4Q$,
则 $\angle QA_3A_4 + \angle QA_4A_5$
$= \angle A_3A_4Q + \angle QA_4A_5 = \angle A_3A_4A_5$.
同理 $\angle QA_2A_3 + \angle QA_5A_6$
$= \angle A_4A_5Q + \angle QA_5A_1 = \angle A_4A_5A_1$.
而 $\angle QA_1A_2 = \frac{1}{2}\angle A_5A_1A_2$.

上面三式相加得这五个角之和恰为内角和的一半, 即满足 (1) 式. 所以点 Q 符合条件.

显然, 这种配对方法对一般情形也适用. 这就说明了轨迹满足纯粹性.

(ii) 完备性 不妨设正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆半径为1. 现将这个正多边形置于复平面中: 其中心 O 置于原点, 且使得顶点 A_k 所对应的复数为1的 n 次单位根 $w^k\ (k=1,2,\cdots,n)$.

又设点 Q 对应的复数为 z, 则由复数知识知: 有向角 $\angle QA_kA_{k+1}$ 对应复数 $z_k = \frac{z-w^k}{w^{k+1}-w^k} = \frac{z-w^k}{w^k(w-1)}\ (k=1,2,\cdots,n)$ 的辐角.

记 $f(z) = \frac{z-w}{w(w-1)}\cdot\frac{z-w^2}{w^2(w-1)}\cdot\cdots\cdot\frac{z-w^n}{w^n(w-1)}$. ……(2)

则 $\angle QA_1A_2 + \angle QA_2A_3 + \cdots + \angle QA_{n-1}A_n + \angle QA_nA_{n+1}$ 对应 $f(z)$ 的辐角.

因此, 若点 Q 满足 (1) 式则其对应的复数 z 必满足: 存在 $r>0$, 使得: $f(z) = re^{i\frac{n-2}{2}\pi}$. ……(3)

下面我们将 (2) 式化简. 由引理1、2、3可得:

$$f(z) = \frac{(z-w)(z-w^2)\cdot\cdots\cdot(z-w^n)}{ww^2\cdot\cdots\cdot w^n(w-1)^n}$$
$$= \frac{z^n-1}{e^{i(n+1)\pi}(w-1)^n} = \frac{z^n-1}{2^n\sin^n\frac{\pi}{n}e^{i\frac{3n}{2}\pi}}.$$

则 (3) 式等价于: 存在 $r>0$, 使得

$$\frac{z^n-1}{2^n\sin^n\frac{\pi}{n}e^{i\frac{3n}{2}\pi}} = re^{i\frac{n-2}{2}\pi}.$$

化简得 $z^n - 1 = re^{i\frac{n-2}{2}\pi}\cdot 2^n\sin^n\frac{\pi}{n}e^{i\frac{3n}{2}\pi}$
$= 2^n r\sin^n\frac{\pi}{n}e^{i(2n-1)\pi} = -2^n r\sin^n\frac{\pi}{n}$.

即 (3) 式等价于: 存在 $r>0$, 使得
$z^n = 1 - 2^n r\sin^n\frac{\pi}{n}$. ……(4)

显然有 $1-2^n r\sin^n\frac{\pi}{n}\in\mathbf{R}$.

记 $c = \left|1-2^n r\sin^n\frac{\pi}{n}\right|$, 则 c 为非负实数. 下面对 r 分类讨论.

(a) 当 $r = \frac{1}{2^n\sin^n\frac{\pi}{n}}$ 时, $c=0$, 则 $z=0$ 满足条件. 此时点 Q 在正 n 边形中心.

(b) 当 $0 < r < \frac{1}{2^n\sin^n\frac{\pi}{n}}$ 时, $0<c<1$, $z = \sqrt[n]{c}e^{i\frac{2k}{n}\pi} = \sqrt[n]{c}w^k\ (k=1,2,\cdots,n)$. 注意到 $0<\sqrt[n]{c}<1$, 复数 w^k 对应顶点 A_k, 则此时点 Q 在线段 $OA_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 上, 但不能取端点.

(c) 当 $r > \frac{1}{2^n\sin^n\frac{\pi}{n}}$ 时, $c>0$, $z^n = -c = ce^{i\pi}$, 则 $z = \sqrt[n]{c}e^{i\frac{2k}{n}\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{n}} = \sqrt[n]{c}w^k\cdot e^{i\frac{\pi}{n}}\ (k=1,2,3,\cdots,n)$. 此时点 Q 在将射线 $OA_k\ (i=1,2,\cdots,n)$ 绕点 O 旋转 $\frac{\pi}{n}$ 后的射线上 (但不能取点 O). 易知此时点 Q 即是在去掉端点后的射线 OM_k 上 (M_k 为边 A_kA_{k+1} 的中点).

综上, 点 Q 必在线段 OA_i 和射线 $OM_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$ 上 (但不含顶点 A_i).

完备性得证.

图2中给出了 $n=3$、4时点 Q 的轨迹.

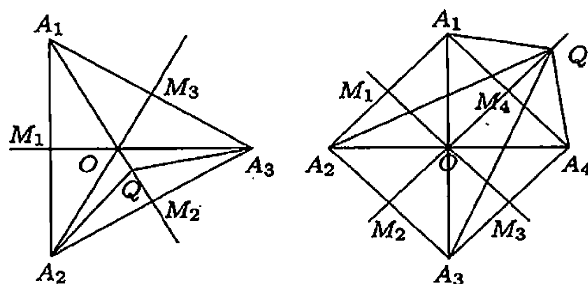


图 2

若限制点 Q 在正 n 边形内, 即得猜想中结论. 因此猜想成立.

若将条件 (1) 改为 $\angle QA_1A_2 + \angle QA_2A_3 + \cdots$

椭圆内一个圆的性质

226500 江苏省如皋市教师进修学校 徐 道

众所周知，椭圆有四个顶点，顺次连结这四个点所成四边形是菱形，此菱形的内切圆在椭圆内部. 但这个圆与椭圆之间具有的性质却鲜为人知，本文试图解决这一有趣的问题.

设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，则其四个顶点分别为 $A(a,0)$、$B(0,b)$、$A'(-a,0)$、$B'(0,-b)$，菱形 $ABA'B'$ 的内切圆 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，半径 $r=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

性质1　直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 相交于 P、Q 两点，若椭圆中心 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则 $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$.

证明：假设直线 l 的斜率存在，可设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，整理得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2mkx+a^2m^2-a^2b^2=0$.

设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，则有

$$+\angle QA_{n-1}A_n+\angle QA_nA_{n+1}=\frac{n-4}{2}\pi.\cdots(5)$$

则经类似讨论知此时与(4)式对应的结果为：存在 $r>0$，使得 $z^n=1+2^nr\sin^n\frac{\pi}{n}$. 显然有 $1+2^nr\sin^n\frac{\pi}{n}\in\mathbf{R}^+$.

记 $c=1+2^nr\sin^n\frac{\pi}{n}>1$，则 $z=\sqrt[n]{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k}{n}\pi}=\sqrt[n]{c}w^k\,(i=1,2,\cdots,n)$. 注意到此时 $\sqrt[n]{c}>1$，w^k 对应顶点 A_k，可知在(5)式的条件下点 Q 必在射线 OA_i 上，但不在线段 OA_i 上 $(i=1,2,\cdots,n)$.

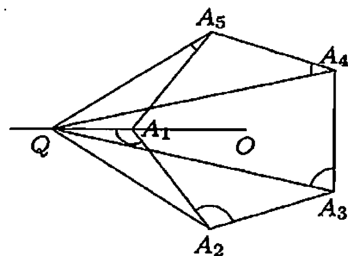


图 3

我们仍以正五边形为例用配对法证明纯粹性. 如图3所示，不妨设 Q 在 OA_1 的延长线上. 与定理1的证明中一样，有：

$$\angle QA_3A_4+\angle QA_4A_5$$
$$=\angle A_3A_4Q+\angle QA_4A_5=\angle A_3A_4A_5.$$
$$\angle QA_2A_3+\angle QA_5A_6$$
$$=\angle A_4A_5Q+\angle QA_5A_1=\angle A_4A_5A_1.$$

区别之处在于：此时的 $\angle QA_1A_2$ 为负且 $\angle QA_1A_2=\angle OA_1A_2-\pi=\frac{1}{2}\angle A_5A_1A_2-\pi$.

上面三式相加得这五个角之和比正五边形内角和的一半少 π，即满足(5)式.

显然这个方法对一般情形也适用.

综上可得：

定理2　凸正 n 边形的顶点 A_1、A_2、$\cdots$、A_n $(n\geqslant 3)$ 按逆时针方向排列，点 O 为其中心，$\angle QA_kA_{k+1}(k\in\mathbf{N}^*)$ 为有向角且约定以顺时针方向为正，则满足(5)式的点 Q 的轨迹为射线 OA_1、OA_2、$\cdots$、OA_n 在该正 n 边形外面的部分.

如果把定理1、2中的这两个轨迹合起来，即有：

定理3　凸正 n 边形的顶点 A_1、A_2、$\cdots$、A_n $(n\geqslant 3)$ 按逆时针方向排列，点 O 为其中心，$\angle QA_kA_{k+1}(k\in\mathbf{N}^*)$ 为有向角且约定以顺时针方向为正，则满足(1)式或(5)式的点 Q 的轨迹为正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 n 条对称轴(但除去顶点 $A_i,i\in\mathbf{N}^*$).

参考文献

[1] 聂柏琴. 正方形的一个轨迹问题[J]. 中学数学教学, 2011(2): 62.

[2] 常庚哲. 复数计算与几何证题[M]. 上海: 上海教育出版社, 1980: 13, 19.

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2mk}{a^2k^2+b^2},$$
$$x_1x_2=\frac{a^2m^2-a^2b^2}{a^2k^2+b^2}.$$
$$y_1y_2=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2$$
$$=\frac{k^2(a^2m^2-a^2b^2)}{a^2k^2+b^2}-\frac{2a^2m^2k^2}{a^2k^2+b^2}+m^2$$
$$=\frac{m^2b^2-k^2a^2b^2}{a^2k^2+b^2}.$$
$$\therefore\ \frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{m^2b^2-k^2a^2b^2}{a^2m^2-a^2b^2}.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而O至直线$PQ:y=kx+m$的距离为
$d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$, 即$d^2=\frac{m^2}{k^2+1}$.
又由题意$d^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. 故有
$$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{m^2}{k^2+1}$$
$$\therefore\ m^2b^2-k^2a^2b^2=-(a^2m^2-a^2b^2).\cdots(2)$$
由(1)、(2)得
$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-1$, $OP\perp OQ$, $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$.

若直线l的斜率不存在, 也可证$\angle POQ=\frac{\pi}{2}$.

性质2　直线l与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$相交于$P$、$Q$两点, O为椭圆中心, 若$\angle POQ=\frac{\pi}{2}$, 则O到直线l的距离d为定值$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

证明: 假设直线OP的斜率存在, 可设其方程为$y=kx\,(k>0)$, 代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中, 得$(a^2k^2+b^2)x^2=a^2b^2$. $\therefore\ x=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}$.

于是可设$P\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}},\frac{abk}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}\right)$,

则$Q\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\left(-\frac{1}{k}\right)^2+b^2}},\frac{ab\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)}{\sqrt{a^2\left(-\frac{1}{k}\right)^2+b^2}}\right)$,

即$Q\left(\frac{abk}{\sqrt{a^2+b^2k^2}},\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2k^2}}\right)$.

$\therefore$ 直线PQ的方程为
$$\frac{x-\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}}{\frac{abk}{\sqrt{a^2+b^2k^2}}-\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}}=\frac{y-\frac{abk}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}}{\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2k^2}}-\frac{abk}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}},$$
即
$$\frac{\sqrt{a^2k^2+b^2}\,x-ab}{k\sqrt{a^2k^2+b^2}-\sqrt{a^2+b^2k^2}}=\frac{\sqrt{a^2k^2+b^2}\,y-abk}{-\sqrt{a^2k^2+b^2}-k\sqrt{a^2+b^2k^2}},$$
也就是
$$(\sqrt{a^2k^2+b^2}+k\sqrt{a^2+b^2k^2})\sqrt{a^2k^2+b^2}\cdot x$$
$$+(k\sqrt{a^2k^2+b^2}-\sqrt{a^2+b^2k^2})\sqrt{a^2k^2+b^2}\cdot y$$
$$-ab(\sqrt{a^2k^2+b^2}+k\sqrt{a^2+b^2k^2})$$
$$-abk(k\sqrt{a^2k^2+b^2}-\sqrt{a^2+b^2k^2})=0,$$
$\therefore\ (\sqrt{a^2k^2+b^2}+k\sqrt{a^2+b^2k^2})x+(k\sqrt{a^2k^2+b^2}-\sqrt{a^2+b^2k^2})y-ab\cdot(k^2+1)=0.$

由于$(\sqrt{a^2k^2+b^2}+k\sqrt{a^2+b^2k^2})^2+(k\sqrt{a^2k^2+b^2}-\sqrt{a^2+b^2k^2})^2=(a^2k^2+b^2)(k^2+1)+(k^2+1)(a^2+b^2k^2)=(a^2+b^2)(k^2+1)^2$, 所以
$$d^2=\frac{a^2b^2(k^2+1)^2}{(a^2+b^2)(k^2+1)^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$$
$$d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

若直线OP的斜率不存在, 也可证得
$$d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

性质1、性质2可统一为:

性质3　直线l与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$相交于$P$、$Q$两点, O为椭圆的中心, 则O到l的距离为定值$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$的充要条件是$\angle POQ$的大小为定值$\frac{\pi}{2}$.

注: 定值$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$就是菱形$ABA'B'$的内切圆的半径.

由性质3易得:

性质4　过椭圆中心作两条相互垂直的直线, 与椭圆相交于四点, 顺次连结这四点所成菱形的内切圆的半径是定值.

性质5　在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上任取一点$D_1$, 过$D_1$作圆$O:x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$的切线与椭圆交于另一点$D_2$, 过$D_2$作圆$O$的切线与椭圆交于第三点$D_3$, 过$D_3$作圆$O$的切线与椭圆交于第四点$D_4$, 则四边形$D_1D_2D_3D_4$是菱形, 圆$O$是此菱形的内切圆.

运用图形旋转解题的思路探究

200065 上海市甘泉外国语中学 何 莹

随着新课程标准的实施以及课程改革的不断深入，其基本理念对近几年中考数学命题产生了重大影响．新课程标准下的初中数学教材，增添了图形变换的问题，使数学更贴近生活，几何变换思想的渗透已逐步成为教学中关注的重点，并在近几年的中考、竞赛试题中经常出现，这使得数学试题的解题方法和技巧更加灵活多变，因此在平时的教学中教师要抓住三种基本变换的特征和基本解题思路来指导学生．

旋转是几何中的三种基本变换之一，它一般先对给定的图形(或其中一部分)进行旋转，只改变图形的位置，而不改变其形状大小，使几何图形重新组合，然后在新的图形中分析有关图形之间的关系，进而揭示条件与结论之间的内在联系，提供解题思路．运用图形旋转解题时关键是要抓住图形变换过程中的几何不变性，即旋转不变性、数值不变性等．它不仅可以使分散的条件相对集中起来，为题设和结论的沟通架起桥梁，而且还可以拓展学生的解题思路，培养学生的创新思维能力．

一、善于抓住图形旋转中的不变量

图形旋转的主要特征是：图形中每一点都绕着旋转中心旋转了同样大小的角度，对应点到旋转中心的距离相等，对应线段相等，对应角相等，图形的形状与大小没有发生变化．要解决此类旋转问题除了要理解旋转的定义和性质，把旋转的定义和性质牢固地记在心中之外，关键是要善于抓住图形旋转中的不变量，例如角、线段等，利用“旋转后对应点与旋转中心的连线所成的角都等于旋转角”和“旋转后对应边、对应角都不变”的性质解题．

例1 (2011年浙江舟山中考试题)如图1，点A、B、C、D、O都在方格纸的格点上，若$\triangle COD$是由$\triangle AOB$绕点O按逆时针方向旋转而得，则旋转的角度为 ……………………………… ( )

(A) 30°； (B) 45°； (C) 90°； (D) 135°.

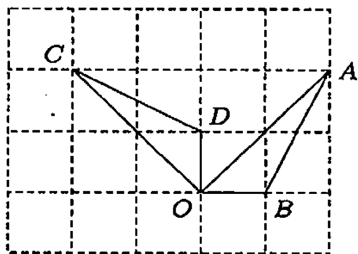


图1

【分析】$\triangle COD$是由$\triangle AOB$绕点O按逆时针方向旋转而得，由图1可知，$\angle BOD$为旋转角，可得旋转的角度为90°.

例2 如图2，在平面直角坐标系中，点A在x轴上，$\triangle ABO$是直角三角形，$\angle ABO = 90°$．点B的坐标为$(-1, 2)$．将$\triangle ABO$绕原点O顺时针旋转90°得到$\triangle A_1B_1O$.

(1) 求点A_1、B_1坐标.

(2) 连结BB_1交A_1O于点M，求$\dfrac{A_1M}{MO}$的值.

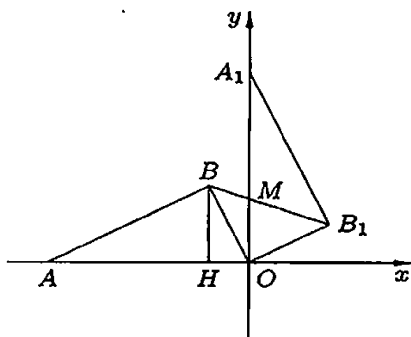


图2

【分析】(1) 关键抓住图形旋转性质．$B_1O = BO$，旋转角$\angle BOB_1 = 90°$，$A_1O = AO$，B_1到x轴的距离为OH，到y轴的距离为BH，解得$A_1(0, 5)$、$B_1(2, 1)$.

(2) 由于旋转不改变图形的形状和大小，则$\angle A_1B_1O = \angle ABO = 90°$，$\angle BOB_1 = 90°$.

$\therefore A_1B_1 /\!/ BO$, $\triangle A_1MB_1 \backsim \triangle OMB$, $\dfrac{A_1M}{MO} = \dfrac{A_1B_1}{OB} = \dfrac{AB}{OB} = 2$.

利用图形旋转的不变性, 探索图形在旋转过程中的有关规律, 让同学们体验图形旋转变换的性质, 提高了同学们的空间想象、规律探索、推理能力以及分析问题、解决问题的能力.

二、善于发现图形旋转中的全等图形

图形的旋转变换不改变图形的形状、大小, 只改变图形的位置, 故解题时可充分利用图形的旋转变换的这一特点, 去寻找和发现图形中的全等图形, 通过线段、角的转换达到求解的目的.

例3 (2011年湖北荆州中考试题) 如图3, 点P是矩形$ABCD$下方一点, 将$\triangle PCD$绕点P顺时针旋转60°后恰好点D与点A重合, 得到$\triangle PEA$, 连结EB, 问$\triangle ABE$是什么特殊三角形? 请说明理由.

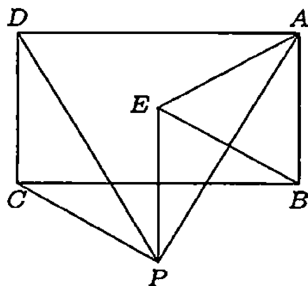


图 3

【分析】根据旋转的性质, 图形的旋转是图形上的每一点在平面上绕某个固定点旋转固定角度的位置移动, 其中对应点到旋转中心的距离相等, 旋转前后图形的大小和形状没有改变, 根据图形求出旋转的角度, 即可得出三角形的形状.

例4 (河北中考试题) 如图4, 一等腰直角三角尺GEF的两条直角边与正方形$ABCD$的两条边分别重合在一起. 现正方形$ABCD$保持不动, 将三角尺GEF绕斜边EF的中点O (点O也是BD中点) 按顺时针方向旋转.

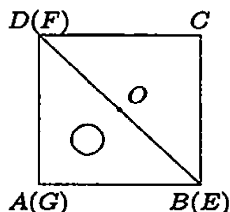


图 4

(1) 如图5, 当EF与AB相交于点M, GF与BD相交于点N时, 通过观察或测量BM, FN的长度, 猜想BM, FN满足的数量关系, 并证明你的猜想;

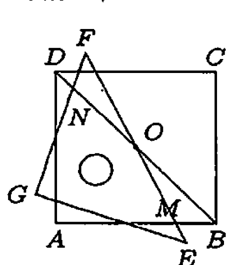


图 5

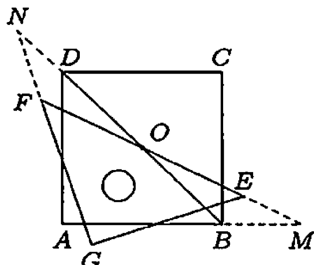


图 6

(2) 若三角尺GEF旋转到如图6所示的位置时, 线段FE的延长线与AB的延长线相交于点M, 线段BD的延长线与GF的延长线相交于点N, 此时, (1) 中的猜想还成立吗? 若成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由.

【分析】本题主要考查旋转图形的性质, 解答时应着眼于图形的旋转不变性来探索线段之间的变化规律. 对于 (1) 问, 经测量后可知$BM = FN$, 然后利用三角形全等证明即可; 对于 (2) 问, 要明确在继续旋转的过程中, 虽然$\triangle OBM$和$\triangle OFN$都发生了变化, 但二者之间全等的关系没变, 故结论成立.

图形的旋转变换是把平面内的某个图形绕定点 (旋转中心), 按一定的方向旋转一定角度 (旋转角) 构造出新的图形, 可以利用旋转后的图形形状、大小都没有发生改变这一特征, 找到解题途径.

三、善于利用图形旋转将分散元素集中

在解题过程中, 我们会遇到各种各样的疑难问题, 题目的条件比较分散, 线段、角、图形的面积又不在同一个图形中, 这时可以认真分析图形和条件是否有下面一些特殊情况: 与等腰三角形有关的问题, 常取顶角的顶点为旋转中心作旋转变换; 与正三角形 (或正方形) 有关的问题, 常可利用正三角形 (或正方形) 的特性作旋转变换; 与圆有关的问题, 常取圆心为旋转中心作旋转变换. 通过这些旋转变换带来新的全等形、相等的线段、相等的角等等, 从而将已知条件相对集中, 以利于问题的解决.

例5 如图7, 点P是等边$\triangle ABC$内的一点, $PB = 2, PC = 1, \angle BPC = 150°$, 求$PA$的长度.

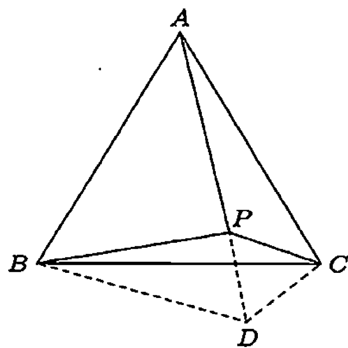


图 7

【分析】图形中PA、PB、PC三条线段是绕点P向外呈放射状, 条件十分分散不易直接求出PA的值, 如何将PA、PB、PC集中在一个三角形中, 这是解决本题关键. 由于$\triangle ABC$是等边三角形, 所以将$\triangle ACP$绕点C按逆时针方向旋转$60°$到$\triangle BCD$的位置, 则$PA = BD$, 连结PD, 这样把PA、PB、PC集中到一个$\triangle BPD$中, 问题即可解决.

例6　如图8, 在$\triangle ABC$中, $\angle ACB = 90°$, $AC = BC$, M、N为AB上的两点, 且满足$AM^2 + BN^2 = MN^2$, 求$\angle MCN$的度数.

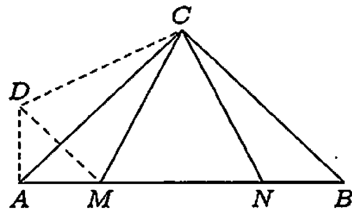


图 8

【分析】因为题目所给的条件AM、BN、MN三条线段在同一条直线上, 并且满足$AM^2 + BN^2 = MN^2$, 那我们想想, 在什么样的三角形中满足两条边的平方和等于第三条边的平方? 当然只有在直角三角形中, 运用勾股定理可得. 因此我们必须把线段AM、BN、MN想办法转移到一个直角三角形中, 去探索它们之间的关系, 因为题目条件中, $\angle ACB = 90°$, $AC = BC$, $\triangle ABC$是等腰直角三角形, 所以把$\triangle BCN$绕点C按顺时针方向旋转$90°$到$\triangle ACD$的位置, 连结DM, 运用勾股定理的逆定理, 及三角形全等知识, 即可求$\angle MCN$的度数.

例7　如图9, 等腰直角三角形ABC, $\angle ABC = 90°$, $AB = a$, O为AC中点, $\angle EOF = 45°$. 求当E、F分别在AB、BC上运动时, $\triangle BEF$周长与a的关系.

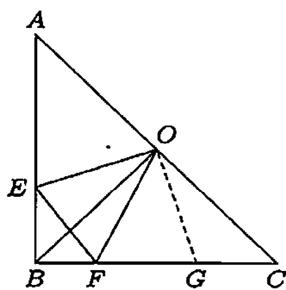


图 9

【分析】过点O作$OG \perp OE$交BC于点G, 可得$\triangle COG \cong \triangle BOE$, $\triangle EFO \cong \triangle GFO$, 得$EB = GC$, $EF = GF$. $\therefore$ $\triangle BEF$的周长为a.

例8　如图10, 正方形$ABCD$中, E为BC上一点, F为CD上一点. 如果$BE + DF = EF$, 求$\angle EAF$的度数.

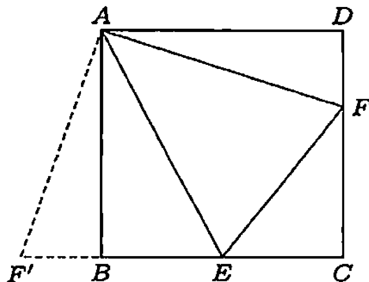


图 10

【分析】在题中没有给出具体线段的边长, 只有三条线段的长度关系, 条件分散, 学生拿到题目往往束手无策. 但是如果将线段DF移到与BE一直线上, 就有线段$DE = EF$, 条件相对较为集中. 将$\triangle ADF$绕点A顺时针旋转$90°$, 点D与点B重合, 点F与点F'重合, 这时$F'E = EF$, $\triangle AF'E \cong \triangle AFE$. 利用旋转角$90°$, 得出$\angle EAF = 45°$.

通过以上例题的详解和探究, 使我们进一步了解了图形的旋转变换由旋转中心、旋转角和旋转方向所决定, 旋转前后两个图形对应点到旋转中心的距离相等, 对应点与旋转中心的连线所成的角彼此相等, 旋转前后的图形全等.

我们得出旋转变化解题的一般规律:

1. 旋转前提. 当题目的图形是等边三角形、等腰直角三角形、正方形时, 所给的条件十分分散, 需要我们计算边、角、面积, 此时, 又很难求解, 可以考虑用旋转变换解题.

2. 旋转的角度. 当题目图形是等边三角形、

(下转第5-31页)

不等式$e^x \geqslant x+1$和$\ln(x+1) \leqslant x$的应用

224600　江苏省响水中学高数组　魏立国

不等式$a^2+b^2 \geqslant 2ab$早已有大量的研究结果, 而不等式$e^x \geqslant x+1$和$\ln(x+1) \leqslant x\ (x>-1)$的应用却很少有人研究. 其实后面这两个基本结论, 在有些不等式放缩中所起的作用真是妙不可言, 本文将试图通过案例来说明它在不等式放缩中的应用.

一、不等式$e^x \geqslant x+1$和$\ln(x+1) \leqslant x$的证明

对于$e^x \geqslant x+1$的证明, 只须构造函数$\phi(x)=e^x-x-1$, 则$\phi'(x)=e^x-1$.

令$\phi'(x)=0$, 则$x=0$. 因为$x\in(-\infty,0)$, $\phi'(x)<0$; $x\in(0,\infty)$, $\phi'(x)>0$, 所以$\phi(x) \geqslant \phi(0)=0$, 即证得$e^x \geqslant x+1$.

对于$\ln(x+1) \leqslant x$的证明, 只需当$x+1>0$时, 对$e^x \geqslant x+1$两边取对数即可. 显然, 这两个不等式本质上是相通的.

二、应用案例

案例1　给定数列$\{x_n\}$, 其中$x_1=a$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}\ (n=1,2,\cdots)$, 求证: 如果$a>3$, 当$n \geqslant \dfrac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$时, 必有$x_{n+1}<3$.

这道题是1984年高考第8题第(3)小题, 2009年6月高考前, 笔者为了让学生领略一下反证法证明的精妙, 特选此题, 让同学们思考. 同学甲说, 先用不动点法, 求x_{n+1}. 即

$$\frac{x_{n+1}}{x_{n+1}-2}=\frac{\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}}{\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}-2}=\frac{x_n^2}{(x_n-2)^2}$$

$$=\cdots=\frac{x_1^{2^n}}{(x_1-2)^{2^n}}=\frac{a^{2^n}}{(a-2)^{2^n}},$$

$$\therefore x_{n+1}=\frac{2}{1-\left(1-\dfrac{2}{a}\right)^{2^n}}.$$

欲证$x_{n+1}<3$, 即$\dfrac{2}{1-\left(1-\dfrac{2}{a}\right)^{2^n}}<3$,

也就是要证$\left(1-\dfrac{2}{a}\right)^{2^n}<\dfrac{1}{3}$.

往下怎么做, 同学甲做不下去了, 笔者也认为不好做, 正想准备收场, 来展示一下反证法的精妙之处, 同学乙说: 用老师总结过的$e^x \geqslant x+1$可以得$\left(1-\dfrac{2}{a}\right)^{2^n} \leqslant e^{-\frac{2}{a}\times 2^n}$, 即要证$e^{-\frac{2^{n+1}}{a}}<\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2^{n+1}}{a}<\ln\dfrac{1}{3}$, $a<\dfrac{2^{n+1}}{\ln 3}$. 由$n \geqslant \dfrac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$得$a \leqslant 3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$, 即要证$3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n<\dfrac{2^{n+1}}{\ln 3}$, 即$3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<\dfrac{2}{\ln 3}$.

① 当$n \geqslant 2$时, $3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leqslant \dfrac{4}{3}$, 只要证$\dfrac{4}{3}<\dfrac{2}{\ln 3}$, 也就是$\ln 9<3$, 显然成立.

② 当$n=1$时, 由$1 \geqslant \dfrac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$, $a>3$, 得$4 \geqslant a>3$, 而$\left(1-\dfrac{2}{a}\right)^{2^n}=\left(1-\dfrac{2}{a}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3}$, $\therefore x_{n+1}<3$.

同学乙能从正面做出来, 这是笔者始料未及的. 可以说这位同学已把$e^x \geqslant x+1$运用得出神入化.

说明: 案例1的关键在于如何把"$1-\dfrac{2}{a}$"放大为"$e^{-\frac{2}{a}}$", 即把"$1+x$"型放大为"e^x"型. 这一过程说明同学乙真正把$e^x \geqslant x+1$结论用活了. 这个案例也告诉我们, 老师要相信学生, 学生的潜力是巨大的.

案例2　(2008年江苏省姜堰中学最后一卷

压轴题) 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-x$ (e为自然对数的底数).

(1) 求$f(x)$的最小值.

(2) 设$n\in\mathbf{N}^*$, 探究$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$的整数部分的值, 并证明你的结论.

分析: (1) 由$f(x)=\mathrm{e}^x-x$, 即$f(x)\geqslant 1$.

(2) 该小题看上去无法下手, 其实, 一道压轴题的前面小题, 往往就是后面小题的阶梯, 当你无法入手的时候看能否利用前面小题. 第(1)小题的实质, 就是$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$. 对通项$\left(\frac{k}{n}\right)^n$如何使用$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$呢? 只要根据不等式的基本结构对号入座. 因为通项中根本没有e, 所以只能在谁是$1+x$上下功夫, 底数是$\frac{k}{n}$, 指数是n, 究竟谁写成$1+x$, 只能试试看.

如把$\frac{k}{n}$写成$1+\frac{k-n}{n}$, 则$\left(\frac{k}{n}\right)^n=\left(1+\frac{k-n}{n}\right)^n\leqslant\left(\mathrm{e}^{\frac{k-n}{n}}\right)^n=\mathrm{e}^{k-n}\,(k\in\mathbf{N}^*)$, 你会立刻意识到原来的和式可放缩成等比数列前$n$项和.

如把$\left(\frac{k}{n}\right)^n$放缩成$\left(\frac{k}{n}\right)^{n-1+1}\geqslant\left(\frac{k}{n}\right)^{\mathrm{e}^{n-1}}$,

或$\left(\frac{k}{n}\right)^n=\left(\frac{k}{n-1+1}\right)^n\geqslant\left(\frac{k}{\mathrm{e}^{n-1}}\right)^n$,

或$\left(\frac{k-1+1}{n}\right)^n\leqslant\left(\frac{\mathrm{e}^{k-1}}{n}\right)^n$,

对解题都没有什么实际意义.

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{k-n}{n}}\right)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{k-n}=\mathrm{e}^{-(n-1)}+\cdots+\mathrm{e}^{-1}+1$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\mathrm{e}^n}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}<2.$$

$$又\because\ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\geqslant 1,$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n整数部分为1.$$

说明: 案例2的关键是要关注第一小题, 要有对不等式$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$应用的意识, 即把“$\frac{k}{n}$”写成形式“$1+\frac{k-n}{n}$”. 事实上, 本题在分析过程中, 足以看出$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$的作用.

案例3　(2008年江苏省响水中学最后一卷压轴题) 求证: $\sqrt[n]{\mathrm{e}}<\frac{2n+1}{2n^2}+1.3\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

分析: 本题用$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\geqslant\frac{1}{n}+1$没有用. 用数学归纳法也不容易找到从$n=k$成立到$n=k+1$也成立的因果关系. 对于基本不等式也很难找到解决问题的切入点. 这时候我们就想能否通过构造函数, 把离散型变为连续型, 利用导数去研究. 由$\sqrt[n]{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, 在构造函数时, 可以把$\frac{1}{n}$看成$x$, 这样可减少求导后的繁琐运算.

令$\phi(x)=\mathrm{e}^x-x-\frac{x^2}{2}-1.3$, $x\in(0,1]$.

$\phi'(x)=\mathrm{e}^x-1-x$, 易得$\phi'(x)>0$,

$$\therefore\ \phi(x)\leqslant\phi(1)=\mathrm{e}-1-\frac{1}{2}-1.3$$

$$=\mathrm{e}-2.8<0.$$

$$\because\ \frac{1}{n}\in(0,1],\ \therefore\ \phi(n)<0,$$

$$\therefore\ \sqrt[n]{\mathrm{e}}<\frac{2n+1}{2n^2}+1.3.$$

说明: 案例3的关键在于学会构造合适的函数, 在求导过程中, 巧用了不等式$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$.

案例4　(2011年清华大学自主招生试题) 已知函数$f(x)=\frac{2x}{ax+b}$, $f(1)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$. 令$x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

(Ⅰ) 求数列$\{x_n\}$的通项公式;

(Ⅱ) 证明$x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_{n+1}>\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

分析: 仅分析第(Ⅱ)小题. 由(Ⅰ)可知$x_n=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}$, 要证明$x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_{n+1}>\frac{1}{2\mathrm{e}}$,

即证$\mathrm{e}>\frac{1}{2x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_{n+1}}$, 也就是要证

$$\mathrm{e}>\frac{1}{2\times\frac{1}{2}\times\frac{2^1}{2^1+1}\times\cdots\times\frac{2^n}{2^n+1}},\ 即$$

$$\mathrm{e}>\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right),$$

即要证

$$1>\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right),$$

由$\ln(1+x)\leqslant x$, 得$1>\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$.

$$\because\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}<1,$$

$\therefore$ 原命题显然成立.

说明: 案例4的关键是将代数式$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$使用了不等式$\ln(1+x)\leqslant x$进行放缩, 让一道清华大学自主招生数学难题, 显得平淡无奇.

案例5 (2008年全国高考湖南卷第21题) 已知函数$f(x)=\ln^2(1+x)-\frac{x^2}{1+x}$.

(1) 求函数$f(x)$的单调区间.

(2) 若不等式$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant \mathrm{e}$对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$都成立(其中e是自然对数的底数), 求$\alpha$的最大值.

分析: (1) 本题最常规的解法, 对$f(x)$求导, 由
$$f'(x)=\frac{2\ln(x+1)}{1+x}-\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}=\frac{2(1+x)\ln(1+x)-2x-x^2}{(1+x)^2},$$

令$2(1+x)\ln(1+x)-2x-x^2=0\,(x>-1)$. 但解这个方程, 几乎无法入手, 是不是这个方程无法用初等方法解呢? 现在不能下这一结论. 至少说很难解, 此时, 我们应该换位思考, 是不是$f'(x)=0$根本就没有根, 这一想法是错误的. 因为, 我们一眼看出0就是它的一个根, 那么是不是只有一根为0呢? 是否还有其他的根呢? 显然, 接下来的工作, 必须研究$\phi(x)=2(1+x)\ln(1+x)-2x-x^2$的单调性.

$\phi'(x)=2\ln(x+1)+2-2-2x=2[\ln(x+1)-x]$. 由$\ln(x+1)\leqslant x$可知, $\phi'(x)\leqslant 0$, 而$\phi(0)=0$,

$\therefore$ 当$x\in(-1,0)$时, $\phi(x)>\phi(0)=0$, 当$x\in(0,\infty)$时, $\phi(x)<\phi(0)=0$.

$\therefore$ 当$x\in(-1,0)$时, $f(x)$单调递增, 当$x\in(0,\infty)$时, $f(x)$单调递减.

(2) 略.

案例6 (2008年全国高考山东卷第21题) 已知函数$f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}+a\ln(x-1)$, 其中$n\in\mathbf{N}^*$, a为常数.

(1) 当$n=2$时, 求函数$f(x)$的极值.

(2) 当$a=1$时, 对任意正整数n, 当$x\geqslant 2$时, 有$f(x)\leqslant x-1$.

下面只分析第(2)小题. 当$a=1$时, $f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}+\ln(x-1)$, 欲证$f(x)\leqslant x-1$, 即证$\frac{1}{(1-x)^n}+\ln(x-1)\leqslant x-1$.

$\because x\geqslant 2$, $\therefore \ln(x-1)=\ln[(x-2)+1]\leqslant x-2$, 即证$\frac{1}{(1-x)^n}\leqslant 1$, 而$x\geqslant 2$, 显然成立.

说明: 对于案例5利用导数判断函数单调性的时候, 不等式$\ln(x+1)\leqslant x$起了决定性的作用. 对于案例6第(2)小题, 如果我们脑中有不等式$\ln(x+1)\leqslant x$这一基本模型, 当看到$\ln(x-1)$就会立刻意识到$\ln(x-1)\leqslant x-2$, 那么, 第(2)小题就显得非常简单.

三、案例反思

1. 从上面案例可以看出, 解决问题最关键的地方都是使用了不等式$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$和$\ln(x+1)\leqslant x$. 而$\mathrm{e}^x\geqslant x+1\iff \ln(x+1)\leqslant x\,(x+1>0)$, 所以我们可以说它们是多题一解, 是一个具有普适性的思考规律.

2. 要提高学生的思维水平, 有必要引领学生探索发现常见的、具有普适性的思考规律. 有助于学生解题少走弯路, 更好更快地找到解题捷径.

3. 教师要注重在课堂教学中将自身是如何看待问题, 又是如何找出解决问题的办法这一思维过程展示给学生, 使学生理解和认识知识发生和发展的必然的因果关系, 从中领悟到思考、分析和解决问题的思想方法和步骤, 培养和提高学生思维的能力.

参考文献

[1] 黄河清. 中学数学问题导学教学策略[M]. 北京: 中国林业出版社, 2008.

(上接第5-28页)

等腰直角三角形、正方形时, 一般旋转60°、45°、90°.

3. 旋转后, 进一步将图形优化整合, 运用所学知识求解, 达到解题目的.

参考文献

[1] 萧振纲. 几何变换与几何证题[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2010.

[2] 胡军. 以不同图形为背景的旋转变换[J]. 初中数学教与学, 2011 (9): 27-28.

[3] 张卫东. 利用旋转解题的若干策略[J]. 中学数学, 2011 (14): 27-29.

也谈一类根式和的取值范围

253500 山东省陵县第一中学 高国军

问题1 设$a>0,d<0$, 且$a\cdot c>b\cdot d$, 求函数$f(x)=\sqrt{ax+b}+\sqrt{c+dx}\ \left(-\frac{b}{a}\leqslant x\leqslant -\frac{c}{d}\right)$的值域.

文[1]运用三角变换巧妙地解决了这类无理函数的值域, 体现出这种方法在解题中的优势, 但笔者认为: 实现快速、准确地对x进行三角换元操作, 显得不太自然, 还需用一定的时间不断尝试、探索. 文[2]中, 作者从代数层面给出了解决该问题的两种方法, 让笔者回味无穷, 情趣悠生. 文[1]、文[2]所使用的数学思想方法和解题技术都体现出了数学美, 都从代数角度很好地分析和解决了该问题. 下面笔者运用换元, 通过数形结合来解决该问题, 展现其数学美.

分析: 在文[1]中, 该问题的处理是通过尝试去掉含变量x的根号形式, 进而引入$\sin\theta,\cos\theta$的辅助角形式. 怎样才能让解题思路来得自然一些呢? 我们不妨直接实现去根号, 引入新变量的操作, 令$u=\sqrt{ax+b},v=\sqrt{c+dx}$, 则$u+v=y$, 即$v=-u+y$, 可看作$v$关于$u$的目标函数, 旨在求斜率为$-1$的直线的纵截距$y$的最大值和最小值, 如果能够再找出$u$和$v$的二次方程的约束条件, 并探寻到其在$uOv$坐标平面内所表示的几何图形, 该问题便迎刃而解.

解法: 令$u=\sqrt{ax+b},v=\sqrt{c+dx}\ (u\geqslant 0,v\geqslant 0)$, 则$u+v=y$, 即$v=-u+y$. 又知, $x=\frac{u^2-b}{a}=\frac{v^2-c}{d}$, 整理得$a\cdot v^2-du^2=ac-bd$, 因为$ac-bd>0,a>0,d<0$, 所以

$$\frac{u^2}{\frac{ac-bd}{-d}}+\frac{v^2}{\frac{ac-bd}{a}}=1. \quad ①$$

(1) 当$a=-d$, 即$a+d=0$时, $u^2+v^2=b+c,(u\geqslant 0,v\geqslant 0)$. ②

由$-\frac{b}{a}\leqslant x\leqslant -\frac{c}{d}$知, $b+c>0$在平面直角坐标系uOv中, ②式表示以(0, 0)为圆心, $\sqrt{b+c}$为半径的第一象限的$\frac{1}{4}$圆. 如图1所示, 由$v=-u+y$可知, $y_{\min}=\sqrt{b+c},y_{\max}=\sqrt{2(b+c)}$.

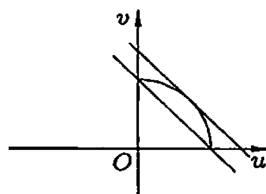


图1

(2) 当$a>-d$, 即$a+d>0$时, 在平面直角坐标系uOv中, ①式表示以(0, 0)为中心, 焦点在u轴上第一象限的$\frac{1}{4}$椭圆. 如图2所示, 由$v=-u+y$可知, $y_{\min}=\sqrt{\frac{ac-bd}{a}}=\sqrt{c-\frac{bd}{a}}$, $y_{\max}$为直线与$\frac{1}{4}$椭圆相切时的直线的纵截距, 由$\begin{cases}u+v=y,\\ av^2-du^2=ac-bd,\end{cases}$ 消去v得$(a-d)u^2-2ay\cdot u+ay^2-ac+bd=0$. 令$\Delta=0$, 得

$$y=\pm\sqrt{(a-d)\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{d}\right)},$$

所以$y_{\max}=\sqrt{(a-d)\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{d}\right)}$.

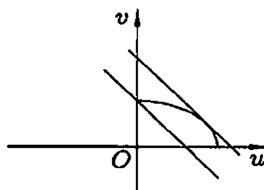


图2

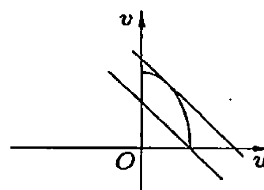


图3

(3) 当$a<-d$, 即$a+d<0$时, 在平面直角坐标系uOv中, ①式表示以(0, 0)为中心, 焦点在v轴上第一象限的$\frac{1}{4}$椭圆. 如图3所示, 由$v=-u+y$可知, $y_{\min}=\sqrt{\frac{ac-bd}{-d}}=\sqrt{b-\frac{ac}{d}}$, 由

(2) 中$y_{\max}$的处理, 同理可得

$$y_{\max}=\sqrt{(a-d)\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{d}\right)}.$$

综上述, $f(x)$的值域为$[y_{\min},y_{\max}]$, 即

$$\left[\min\left\{\sqrt{b-\frac{ac}{d}},\sqrt{c-\frac{bd}{a}}\right\},\sqrt{(a-d)\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{d}\right)}\right].$$

可见, 掌握数形结合, 是我们开拓数学新思维的视角, 是研究数学问题的有效途径; 运用数形结合, 可使复杂问题简单化, 抽象问题具体化, 能有效地把抽象思维与形象思维进行完美结合.

针对问题1, 笔者进一步改进整合发现, 运用数形结合思想可实现深层次的拓展归纳, 去体现数学美.

问题2　设$a>0$, $d<0$, 且$a\cdot c>b\cdot d$, $m\cdot n\neq 0$. 求函数$f(x)=m\sqrt{ax+b}+n\sqrt{c+dx}$ $\left(-\frac{b}{a}\leqslant x\leqslant-\frac{c}{d}\right)$的值域(注: $m=1,n=1$时, 该问题为问题1).

解法: 令$u=m\sqrt{ax+b}$, $v=n\sqrt{c+dx}$, 则$u+v=y$, 即$v=-u+y$.

又知$\frac{-d\cdot u^2}{m^2}+\frac{a\cdot v^2}{n^2}=ac-bd$, 即

$$\frac{u^2}{\frac{m^2(ac-bd)}{-d}}+\frac{v^2}{\frac{n^2(ac-bd)}{a}}=1. \cdots\cdots ③$$

(1) 当$\frac{m^2}{-d}=\frac{n^2}{a}$, 即$am^2+dn^2=0$时, ③式表示以(0, 0)为圆心, $\sqrt{\frac{n^2(ac-bd)}{a}}$为半径的$\frac{1}{4}$圆.

(i) 当$m>0,n>0$时, 表示第一象限的$\frac{1}{4}$圆;

(ii) 当$m<0,n>0$时, 表示第二象限的$\frac{1}{4}$圆;

(iii) 当$m<0,n<0$时, 表示第三象限的$\frac{1}{4}$圆;

(iv) 当$m>0,n<0$时, 表示第四象限的$\frac{1}{4}$圆.

如图4所示.

(2) 当$\frac{m^2}{-d}>\frac{n^2}{a}$, 即$am^2+dn^2>0$时, ③式表示以(0, 0)为中心, 焦点在$u$轴上的$\frac{1}{4}$椭圆.

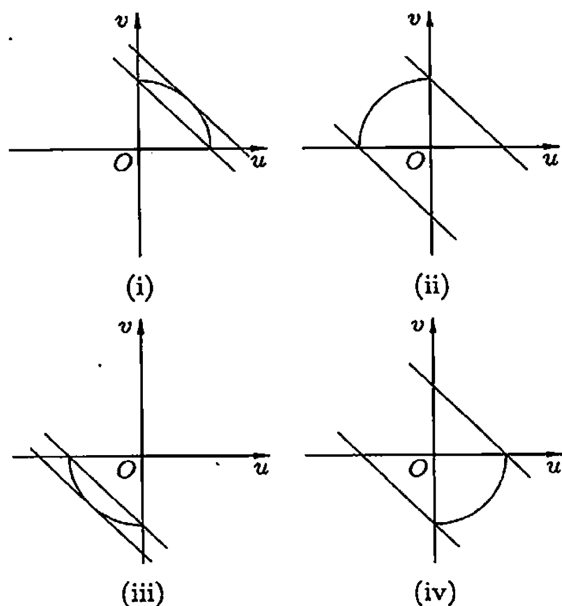


图4

(i) 当$m>0,n>0$时, 表示第一象限的$\frac{1}{4}$椭圆;

(ii) 当$m<0,n>0$时, 表示第二象限的$\frac{1}{4}$椭圆;

(iii) 当$m<0,n<0$时, 表示第三象限的$\frac{1}{4}$椭圆;

(iv) 当$m>0,n<0$时, 表示第四象限的$\frac{1}{4}$椭圆.

如图5所示.

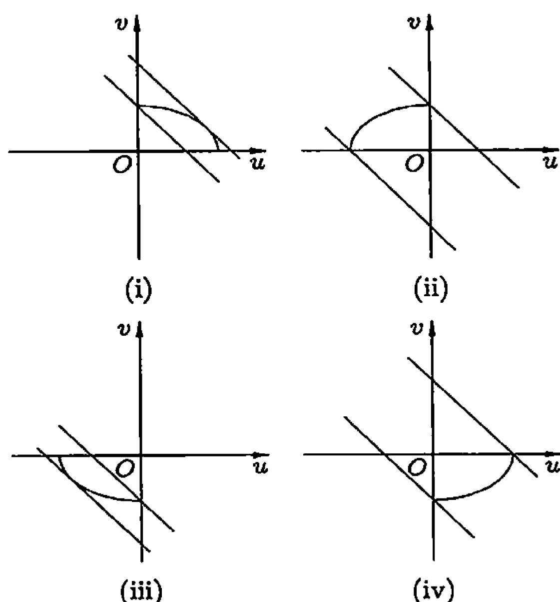


图5

(3) 当 $\frac{m^2}{-d} < \frac{n^2}{a}$, 即 $am^2 + dn^2 < 0$ 时, ③式表示以 (0, 0) 为中心, 焦点在 v 轴上的 $\frac{1}{4}$ 椭圆.

由 (2) 知, 所得四个象限内的图像如图 6 所示.

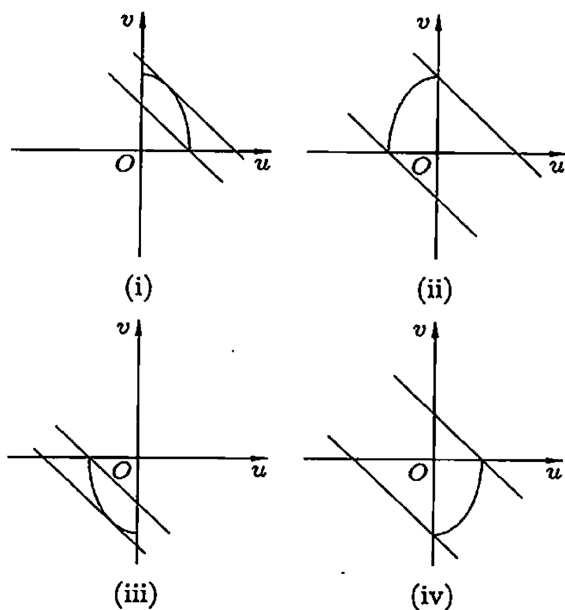


图 6

问题 2 的三种情况中, 每个图像的求值域方法同问题 1. 另外, 问题 2 中, 当 $m \cdot n < 0$ 时, 函数 $f(x) = m\sqrt{ax+b} + n\sqrt{c+dx}$ 在 $\left[-\frac{b}{a}, -\frac{c}{d}\right]$ 内是单调函数, 可通过单调性解决值域问题, 这里不再赘述.

为更好地理解用数形结合思想解决问题 1 和问题 2, 下面笔者举出两例, 以供参考 (其他方法不再赘述).

例 1　求函数 $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{9-x}$ 的值域.

解: 令 $u = \sqrt{x-5}, v = \sqrt{9-x}$,

则 $\begin{cases} v = -u + y, \\ u^2 + v^2 = 4, \\ u \geqslant 0, v \geqslant 0. \end{cases}$

如图 7 可知 $y_{\min} = 2, y_{\max} = 2\sqrt{2}$, 所以该函数的值域为 $[2, 2\sqrt{2}]$.

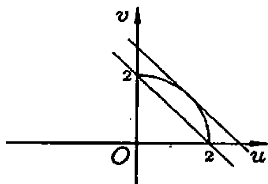


图 7

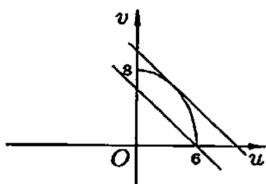


图 8

例 2　求函数 $y = 3\sqrt{x-5} + 4\sqrt{9-x}$ 的值域.

解: 令 $u = 3\sqrt{x-5}, v = 4\sqrt{9-x}$,

则 $\begin{cases} v = -u + y, \\ \frac{u^2}{36} + \frac{v^2}{64} = 1, \\ u \geqslant 0, v \geqslant 0. \end{cases}$

如图 8 可知 $y_{\min} = 6$.

由 $\begin{cases} v = -u + y, \\ \frac{u^2}{36} + \frac{v^2}{64} = 1, \end{cases}$ 消去 v 得

$100u^2 - 72y \cdot u + 36y^2 - 2304 = 0.$

令 $\Delta = 0$, 得 $y = \pm 10$, 所以 $y_{\max} = 10$, 所以该函数的值域为 [6, 10].

在近几年高考试题及高中数学联赛试题中, 笔者发现了涉及此类函数模型的试题, 如:

(2008 年高考数学重庆卷理科第 4 题) 已知函数 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3}$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 则 $\frac{m}{M}$ 的值为……………………………… (　)

(A) $\frac{1}{4}$;　　(B) $\frac{1}{2}$;

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2005 年全国高中数学联赛试题) 使关于 x 的不等式 $\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x} \geqslant k$ 有解的实数 k 的最大值是……………………………… (　)

(A) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$;　　(B) $\sqrt{3}$;

(C) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$;　　(D $\sqrt{6}$.

可见, 涉及此类函数模型的数学问题, 本文的数形结合思想能够对其起着导向作用. 当然, 这两个题的解法很多, 这里不再赘述.

笛卡尔曾说: "通过持续不断的思维活动, 观察它们, 深入考虑它们的相互关系, 这样做是有益的, 我们的认识将因此而愈加真实, 我们的思想也将因此而更加开阔." 可见, 研究一类数学问题, 只要我们从不同角度、用不同思维方式持续地思考和感悟, 就能找到合理的思维起点, 完成解题突破.

参考文献

[1] 王改珍. 巧用三角函数解函数值域问题 [J]. 中学数学教学参考 (上旬), 2011(1 ~ 2): 46 −47.

[2] 陈云烽. 一类根式和的取值范围 [J]. 中学数学教学参考 (上旬), 2011(9): 29−31.

变换视角再探一道立体几何题

410007 湖南省长沙市十五中 厉 倩

例1 (2011年高考全国卷理科第19题) 如图1, 四棱锥$S-ABCD$中, $AB//CD$, $BC\perp CD$, 侧面SAB为等边三角形, $AB=BC=2, CD=SD=1$.

(I) 证明: $SD\perp$平面SAB;

(II) 求AB与平面SBC所成角的大小.

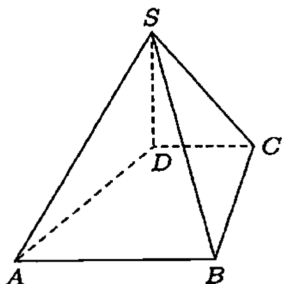


图1

文[1]给出了标准答案, 文[2]又用传统的几何方法和坐标向量方法进行了探究, 笔者受益匪浅, 然而也觉得学生不容易掌握文中的解题方法. 例如标准答案中用综合几何方法寻找并且画出$\angle SGF$ (可以参见文[2]的图6), 使$\angle SGF$等于直线AB与平面SBC所成的角, 这要求学生在探究的过程中选择适当的位置画出这个角. 因为FG这个位置不好找, 这又要求学生有很好的探索能力. 因为利用AB与平面SBC很难直接作出这个线面角, 并且利用CD与平面SBC也很难直接作出这个线面角, 这样想就地取材、轻而易举作出这个线面角几乎不可能. 至此很多学生想用向量法求解, 但是从标准答案给出的向量法来看, 向量法可能更难(对那些喜欢在常态下建立空间直角坐标系的学生来说).

笔者认为, 如果不用互相垂直的三个单位向量作为基向量, 那么, 解题操作简单, 不需要作辅助线, 其方法是: 把不共面的三条线段所代表的向量作为基向量, 然后求解. 以下给出两种方法.

方法一: (I) 取$\overrightarrow{DS}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{CB}$作为基底, 令$\overrightarrow{DS}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CB}=2\vec{c}$,

依题意有$|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}|=1$, 且$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, 则$\overrightarrow{AB}=2\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}-2\vec{c}$, $\overrightarrow{AS}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}$. 由$4=\overrightarrow{AS}^2=\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)^2$, 化简得

$4\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$. ……………………… ①

由$4=\overrightarrow{SB}^2=\left(\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}\right)^2$, 化简得

$4\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$. ……………………… ②

由②−①得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, 结合①得$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$, 所以$\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{AS}=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, 有$DS\perp AS$.

又$\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{SB}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, 有$DS\perp SB$, 从而$SD\perp$平面$SAB$.

(II) 设平面SBC的法向量为$\vec{n}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}$, 由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0$, 得$x+2z=0$. 由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0$, 得$2y+3z=0$. 取$z=2$, 则$x=-4$, $y=-3$, 则$\vec{n}=-4\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$, 计算得$|\vec{n}|=\sqrt{21}$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=6$, 则

$$\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{BA}\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|}=\frac{\sqrt{21}}{7},$$ 所以AB与平面SBC所成角为$\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

方法二: (I) 取$\overrightarrow{DS}$、$\overrightarrow{SB}$、$\overrightarrow{BC}$作为基底, 依题意有$\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}=2\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{BC}$. 由$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=0$得$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}^2=0$, 则$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{SB}=-\overrightarrow{BC}^2=-4$. 由$\overrightarrow{DC}^2=1$, 可得$\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}\right)^2=1$, 再利用$\overrightarrow{SB}^2=4$, 化简可得$\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{SB}=0$所以$DS\perp SB$.

由$\overrightarrow{AS}^2=4$, 得$\left(2\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{BC}\right)^2=4$, 化简可得$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DS}=-1$.

则$\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{DS}\cdot\left(2\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{BC}\right)=$

$2\overrightarrow{DS}^2+\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{DS}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DS}=2+0-2=0$, 所以$DS\perp AS$, 从而$SD\perp$平面$SAB$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知$DS\perp AB$, 则$DS\perp CD$, 又$CD=SD=1$, 所以$SC=\sqrt{2}$, 由$\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}$, 得$2=\overrightarrow{SC}^2=\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}\right)^2$, 化简得$\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BC}=-3$.

设平面SBC的法向量为$\vec{n}=x\cdot\overrightarrow{DS}+y\cdot\overrightarrow{SB}+z\cdot\overrightarrow{BC}$, 由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0$得

$x\cdot\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{SB}+y\cdot\overrightarrow{SB}^2+z\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{SB}=0$,

化简得$4y-3z=0$. 由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, 得

$x\cdot\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{BC}+y\cdot\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BC}+z\cdot\overrightarrow{BC}^2=0$,

化简得$-x-3y+4z=0$. 取$z=4$, 可得

$y=3,x=7$, 则$\vec{n}=7\overrightarrow{DS}+3\overrightarrow{SB}+4\overrightarrow{BC}$, 计算可得$|\vec{n}|=\sqrt{21}$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=6$, 则

$\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$, 所以

AB与平面SBC所成角为$\arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

若作一些常用的辅助线以后, 再选取向量的基底解题, 则方法更多, 有些方法更简单. 例如设AB的中点为E, 连结SE、DE(如图2), 那么有很多好方法, 下面只给出一种方法.

方法三: (Ⅰ) 取$\overrightarrow{DS}$、$\overrightarrow{SE}$、$\overrightarrow{EB}$作为基底, 依题意有

$\left|\overrightarrow{EB}\right|=\left|\overrightarrow{DS}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{SE}\right|=\sqrt{3}$,

$\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{EB}=0$, $\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{EB}$,

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SE}=\overrightarrow{CB}$. 由$\overrightarrow{DE}^2=\overrightarrow{CB}^2=4$, 得$\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SE}\right)^2=4$, 即$\overrightarrow{DS}^2+\overrightarrow{SE}^2+2\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{SE}=4$,

化简得$\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{SE}=0$, 所以$\overrightarrow{DS}\perp\overrightarrow{SE}$.

又$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{EB}$, 则$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EB}=0$,

即$\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SE}\right)\cdot\overrightarrow{EB}=0$, 结合$\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{EB}=0$, 化简得$\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{EB}=0$, 所以$\overrightarrow{DS}\perp\overrightarrow{EB}$, 故$SD\perp$平面$SAB$.

(Ⅱ) 设平面SBC的法向量为$\vec{n}=x\cdot\overrightarrow{DS}+y\cdot\overrightarrow{SE}+z\cdot\overrightarrow{EB}$, 由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0$, 得

$\left(x\cdot\overrightarrow{DS}+y\cdot\overrightarrow{SE}+z\cdot\overrightarrow{EB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SE}\right)=0$,

化简得$x+3y=0$. 由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0$, 得

$\left(x\cdot\overrightarrow{DS}+y\cdot\overrightarrow{SE}+z\cdot\overrightarrow{EB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{EB}\right)=0$,

化简得$3y+z=0$. 取$y=-1$, 可得$x=3,z=3$, 则$\vec{n}=3\overrightarrow{DS}-\overrightarrow{SE}+3\overrightarrow{EB}$, 计算可得$|\vec{n}|=\sqrt{21}$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}=3$, 则

$\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{EB}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{EB}\right|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$, 所以

AB与平面SBC所成角为$\arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

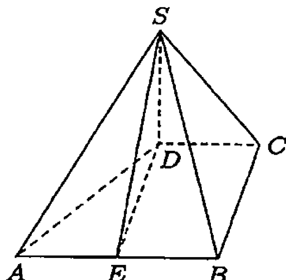


图2

方法三由于作了辅助线SE, 使得基底$\overrightarrow{DS}$、$\overrightarrow{SE}$、$\overrightarrow{EB}$在本质上成为正交基底, 因此从本质上吸纳了空间直角坐标系的优点, 也回避了空间直角坐标系的不足, 因为空间直角坐标系是必须先证明$\overrightarrow{DS}$、$\overrightarrow{SE}$、$\overrightarrow{EB}$两两互相垂直, 并且相应的三直线必须共点, 然后才能建系. 这里利用非坐标向量的自由性可以抛开这些严格的限制, 先行动后挖掘并利用其优点; 同时其单位长度的选择也是自由的, 不必像空间直角坐标系那么严格, 使得我们可以扬长避短地高效解题.

显然对于用非坐标向量法解题, 有人喜欢也有人不喜欢, 但是从文[1]和文[2]来看, 例1用综合几何的方法求解第(Ⅰ)小题不难, 第(Ⅱ)小题较难; 而用坐标向量法求解, 因为不便于建系, 两小题都较难. 高中《数学课程标准》要求我们: 在教学时鼓励学生灵活选择运用向量方法和综合方法, 从不同角度解决立体几何问题. 所以笔者尝试把图1旋转180°, 使图形上下易位以后再求解(参见图3). 基本策略是第(Ⅰ)小题用综合几何的方法求解, 第(Ⅱ)小题用坐标向量法求解或用综合几何的方法求解. 总体感觉是第(Ⅰ)小题稍微降了点难度, 第(Ⅱ)小题不论用哪种方法求解, 难度都有降低. 主要是旋转以后的图像在观看、想象和构建的综合作用下, 使直觉与思维能较好地同化或顺应; 旋转以后的图形能够较好地在原有视觉意象与现有视觉对象之间搭起有效沟通的桥梁; 从而在视觉上能较好地支持直觉思维, 使几何直观能力能顺利推进, 空间想象能力和逻

(下转第5-49页)

对一道竞赛题的变式探究

243000 安徽省马鞍山市成功中学 汪宗兴

2011年第七届北方数学奥林匹克邀请赛试卷(第二天)第六题的题目如下:

如图1, 过点P引$\odot O$的切线PA和割线PBC, $AD\perp PO$, 垂足为点D.

求证: AC是$\triangle ABD$外接圆的切线.

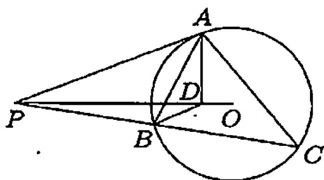


图1

【试题分析】

本题是一道高中数学竞赛第二试的试题, 初看此题, 它表现出的"简约美"就深深地吸引了笔者, 深刻研究后发现其内涵十分丰富, 前后鲜明的对比不禁让笔者感慨, 命题专家的灵感与智慧真是匠心独运. 此类竞赛试题应是教师开展教学研究的宝贵资源, 深入研究, 才能仔细体会试题的命题意图、命题技巧与创新特色. 充分运用这些试题, 对拓展学生, 尤其是优秀生的视域、分析与解决问题的能力和探究能力都很有好处.

本文旨在展示笔者思考的前后历程, 以教师的身份谈谈如何找到解题的"切入点", 如何进行方法的变式、优化解题的过程, 如何进行图形的变式、题目的变式, 在解题中学会"怎样解题", 开发和挖掘题目的丰富内涵, 在"火热的思考"中体会数学"冰冷的美丽"!

【教师思考】

1. 初始思考未启发

题目文字表述简洁, 条件简单, 凭解题经验判断这样的题并不易"入手". 我国著名数学家华罗庚说:"善于'退', 足够地'退', 退到最原始而不失去重要性的地方, 是学好数学的一个诀窍!"受其启发, 笔者决定从"割线PBC过圆心O"这一特殊情形入手, 根据射影定理的基本图形"双垂图"知$\angle CAD=\angle ABD$, 易证结论成立; 另外, 此时$\triangle ABD$的外接圆直径是AB, BC是$\odot O$的直径, 故$\angle CAB=90^\circ$, 得CA是$\triangle ABD$外接圆的切线.

2. 操作确认释疑惑

上述尝试未能给笔者带来"灵感", 一般情形下, 结论是否成立呢? 笔者尝试分析法, 从结论入手, 即将"AC是$\triangle ABD$外接圆的切线", 看作"条件"进行逆向推理. 显然AD是$\triangle ABD$外接圆的弦, 则$\angle CAD$应是弦切角, 由弦切角定理知$\angle CAD=\angle ABD$; 反之若$\angle CAD=\angle ABD$, AC是$\triangle ABD$外接圆的切线. 于是问题化归为证明$\angle CAD=\angle ABD$. 笔者利用几何画板度量角度功能分别测得$\angle CAD$、$\angle ABD$的度数, 发现$\angle CAD=\angle ABD$. 操作确认, 打消了笔者怀疑的念头! 但笔者仍没有找到可行的方法.

3. 峰回路转终成功

笔者尝试证明$\angle CAD=\angle ABD$失败之后, 又回到最原始的方法上, 依据切线的判定定理, 证明CA与$\triangle ABD$外接圆的半径垂直. 如图2, 设$\triangle ABD$的外接圆与PO交于E, 因为$\angle PDA=90^\circ$, 则AE为其直径, 得$\angle ABE=90^\circ$, 因此证CA是$\triangle ABD$外接圆的切线, 只要证$\angle CAE=90^\circ$, 考虑到$\angle PAO=90^\circ$, 故只需证明$\angle PAE=\angle CAO$.

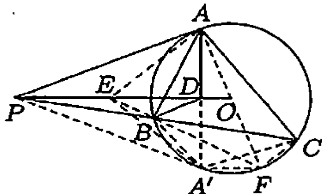


图2

下面围绕这一思路展开, 借助所学知识将涉及的角不断转化, 可能会找到"出路". 作$\odot O$直径AF, 连结FB, 延长AD交$\odot O$于点A', 连结PA'、EA', 由轴对称性质知$\angle PAE=\angle PA'E$,

连结$A'F$，则$\angle CAO=\angle CA'F$. 因为$\angle ABE=90°$, $\angle AA'F=90°$，所以$\angle ABC+\angle PBE=90°$, $\angle AA'C+\angle CA'F=90°$. 又$\angle ABC=\angle AA'C$，由等角的余角相等，得$\angle PBE=\angle CA'F$，故$\angle CAO=\angle PBE$.

理论上，$\angle PA'E=\angle PBE$，故P、E、B、A'四点应该能够共圆.

$\because\ \angle PEB=\angle EBD+\angle EDB=90°+\angle ABD+\angle EDB$, $\angle PA'B=\angle A'AB$,

$\therefore\ \angle PEB+\angle PA'B=90°+\angle ABD+\angle EDB+\angle A'AB=180°$.

$\therefore$ 点P、E、B、A'四点共圆.

$\therefore\ \angle PA'E=\angle PBE$.

$\therefore\ \angle PAE=\angle CAO$，问题终获解决!

笔者想出此法时，激动之情溢于言表，因为此解法具有“自主知识产权”，它不是复制答案而来. 面对竞赛题，老师在考场上做也未必能轻易胜过学生的智慧. 高兴之余，笔者总感觉此法辅助线太多，而且角度转化过于频繁，此法能否简化? 很快发现，在证明$\angle CAO=\angle PBE$时，走了“弯路”，因为$\angle ABE+\angle ABF=90°+90°=180°$，所以$\angle PBE=\angle CBF=\angle CAO$. 解题长度大大缩短! 正如波利亚所说:“解题，如同在黑暗中走进一间陌生的房间. 回顾，则好像打开了电灯. 这时一切都清楚了: 在以前的探索中，哪几步走错了，哪几步不必要，应当怎样走，等等. 朦胧变成了自觉.”

上述方法强化了角的作用，线段的作用发挥不够!

【方法变式】

有无更好的解决方法? 由条件，根据切割线定理、射影定理容易得出B、D、O、C四点共圆，因此尝试使用“正推法”，充分发挥线段的作用，得证法2.

证法2: 如图3，连结OA、OC、CD，则$OA=OC$.

$\because\ PA$是$\odot O$的切线，A是切点，PBC是$\odot O$的割线，

$\therefore\ OA\perp PA$, $PA^2=PB\cdot PC$.

$\because\ AD\perp PO$,

$\therefore\ PA^2=PD\cdot PO$, $OA^2=OD\cdot PO$(射影定理)，

$\therefore\ PB\cdot PC=PD\cdot PO$, $OC^2=OD\cdot PO$.

$\therefore\ B$、D、O、C四点共圆，如图3所示，且$\dfrac{PB}{PD}=\dfrac{PO}{PC}$, $\dfrac{OC}{OD}=\dfrac{PO}{OC}$.

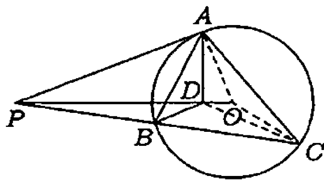


图 3

$\therefore\ \triangle PBD\backsim\triangle POC$, $\triangle POC\backsim\triangle COD$,

$\therefore\ \triangle PBD\backsim\triangle COD$.

$\therefore\ \angle PDB=\angle CDO$, $\dfrac{PD}{CD}=\dfrac{BD}{OD}$.

$\therefore\ \angle ADB=\angle CDA$, $PD\cdot OD=CD\cdot BD$.

$\because\ AD^2=PD\cdot OD$.

$\therefore\ AD^2=CD\cdot BD$.

$\therefore\ \dfrac{AD}{CD}=\dfrac{BD}{AD}$,

$\therefore\ \triangle ABD\backsim\triangle CAD$.

$\therefore\ \angle ABD=\angle CAD$.

$\therefore\ AC$是$\triangle ABD$外接圆的切线.

证法2主要利用边之间的数量关系进行推理，与证法1符合“广义对称”，此法开拓了新的视野，而且获得了更多的结论! 如$\angle PDB=\angle CDO$, $AD^2=CD\cdot BD$，进而可编制出更多的试题(参见题目变式). 如图4所示，综合前两种方法，不难发现$\triangle ABD\backsim\triangle CBE$，能否通过顺推$\triangle ABD\backsim\triangle CBE$，得出结论呢?

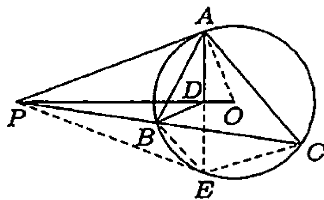


图 4

证法3: 如图4，延长AD交$\odot O$于点E，连结PE、BE、CE.

由圆的对称性易知PE是$\odot O$的切线. 由切线长定理得$PA=PE$. 因为$AD\perp PO$，由垂径定理得$AD=DE=\dfrac{1}{2}AE$. 由弦切角定理得$\angle PAB=\angle PCA$, $\angle PEB=\angle PCE$.

$\therefore\ \triangle PAB\backsim\triangle PCA$, $\triangle PEB\backsim\triangle PCE$.

$\therefore\ \dfrac{PA}{PC}=\dfrac{AB}{CA}$, $\dfrac{PE}{PC}=\dfrac{EB}{CE}$.

$\therefore \dfrac{AB}{CA}=\dfrac{EB}{CE}$,

$\therefore AB\cdot CE=CA\cdot EB$. ······················ (*)

由托勒密定理得

$AE\cdot BC=AB\cdot CE+CA\cdot EB$.

由垂径定理得$AE=2AD$.

$\therefore 2AD\cdot BC=2AB\cdot CE$,

$\therefore AD\cdot BC=AB\cdot CE$.

$\therefore \dfrac{AD}{CE}=\dfrac{AB}{BC}$.

又$\angle BAD=\angle BCE$,

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle CBE$,

$\therefore \angle ABD=\angle CBE$.

$\because \angle CBE=\angle CAD$.

$\therefore \angle CAD=\angle ABD$.

同证法2类似, 此种证明方法亦侧重利用边之间的数量关系. 由于$AB\cdot CE=CA\cdot EB$, 根据对称原理, 可证出$\triangle ADC\backsim\triangle BEC$, 过程如下:

由托勒密定理和垂径定理得

$AE\cdot BC=AB\cdot CE+CA\cdot EB$, 而$AE=2AD$,

$\therefore 2AD\cdot BC=2CA\cdot EB$,

$\therefore AD\cdot BC=CA\cdot EB$.

$\therefore \dfrac{AD}{EB}=\dfrac{CA}{BC}$.

又$\angle CAD=\angle CBE$,

$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle BEC$.

受前面两种证法的启发, 笔者又想出方法1的两种"简化版", 通俗易懂!

证法4: 如图5, 连结OA.

图 5

$\because PA$是$\odot O$的切线, A是切点, PBC是$\odot O$的割线,

$\therefore OA\perp PA, PA^2=PB\cdot PC$.

$\because AD\perp PO$,

$\therefore PA^2=PD\cdot PO$ (射影定理),

$\therefore PB\cdot PC=PD\cdot PO$.

$\therefore B$、D、O、C四点共圆, 四边形$BDOC$的外接圆如图5所示.

作$\triangle ABD$的外接圆$\odot O'$, 交PO于点E, 连结EA、EB、OB、OC.

$\because AD\perp PO$, $\therefore EA$是$\odot O'$的直径.

由$OA=OB=OC$, 得$\angle OAB=\angle OBA$, $\angle OBC=\angle OCB$, $\angle OAC=\angle OCA$.

$\because \angle EAB=\angle EDB, \angle EDB=\angle OCB$.

$\therefore \angle EAB=\angle OCB=\angle OBC$.

$\because \angle BAC+\angle ABC+\angle BCA=180^\circ$,

$\therefore \angle OAC+\angle OAB+\angle OBA+\angle OBC+\angle OCB+\angle OCA=180^\circ$,

即$2\angle OAB+2\angle EAB+2\angle OAC=180^\circ$.

$\therefore \angle OAB+\angle EAB+\angle OAC=90^\circ$, 即$\angle EAC=90^\circ$.

$\therefore AC$是$\triangle ABD$外接圆的切线.

证法5: 如图5, 连结OA、OC, 作$\triangle ABD$的外接圆$\odot O'$交PD于点E.

$\because PA$是$\odot O$的切线,

$\therefore PA^2=PB\cdot PC$.

由射影定理可得$PA^2=PD\cdot PO$,

$\therefore PB\cdot PC=PD\cdot PO$,

$\therefore \dfrac{PD}{PC}=\dfrac{PB}{PO}$,

$\therefore \angle PDB=\angle OCB=\angle EAB$.

$\because PA$是$\odot O$的切线,

$\therefore \angle PAB=\angle ACB$,

$\therefore \angle PAB-\angle EAB=\angle ACB-\angle OCB$.

$\therefore \angle PAE=\angle ACO=\angle OAC$.

$\because \angle PAE+\angle EAO=\angle PAO=90^\circ$,

$\therefore \angle OAC+\angle EAO=90^\circ$, 即$\angle EAC=90^\circ$,

故AC是$\triangle ABD$外接圆的切线.

笔者在网络上发现如下十分简洁的做法:

证法6: 如图6, 延长AD交$\odot O$于E, 连结PE、BE、CE. 则$ABEC$是调和四边形, $AB\cdot EC=AC\cdot BE$.

图 6

根据托勒密定理得$AB\cdot EC+AC\cdot BE=AE\cdot BC, AD=DE$.

$\therefore AD\cdot BC=AB\cdot EC$, 即$\dfrac{AD}{EC}=\dfrac{AB}{BC}$.

又$\angle BAE=\angle BCE$,

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle CBE$.

$\therefore \angle ABD=\angle CBE=\angle CAD$.

$\therefore AC$是$\triangle ABD$外接圆的切线.

证法中涉及"调和四边形", 什么是调和四边形? 它有什么性质? 如何证明这些性质? 这成为笔者思考的又一重要问题. 笔者借助网络, 得知: 对边乘积相等的圆内接四边形叫做调和四边形. 过圆外一点引圆的两条切线与一条割线, 与圆所交四点形成的凸四边形为调和四边形, 理由参见证法3中(*)部分. 限于篇幅, 调和四边形的性质留给感兴趣的读者思考!

本题除了在方法上的变式, 还可以在原题的基础之上, 改编为如下试题:

【题目变式】

题1　如图7, 过点P引$\odot O$的切线PA和割线$PBC, AD\perp PO$, 垂足为点D.

求证: $\angle PDB=\angle ODC$.

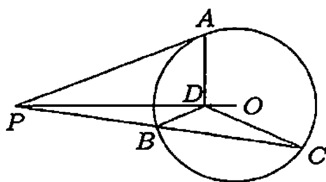


图7

题2　如图7, 过点P引$\odot O$的切线PA和割线$PBC, AD\perp PO$, 垂足为点D. 求证: $AD^2=CD\cdot BD$.

题3　如图8, 过点P引$\odot O$的切线PA和割线PBC、$PEF, AD\perp PO$, 垂足为点D. 求证: $\angle BDE=\angle CDF$.

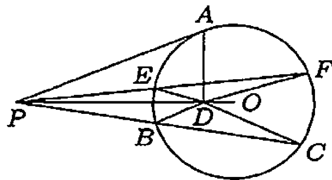


图8

当回首思考证明此题的心路历程, 从最初的无从入手到现在的从容解决, 过程曲折, 但收获颇丰! "解决此题的关键在哪里? 重要的困难是什么? 什么地方笔者可以完成得更好些? 为什么没有觉察到这一点? 要看出这一点必须具备哪些知识? 应该从什么角度去考虑? 这里有没有值得学习的诀窍可供下次遇到类似问题时应用?" 波利亚的话时刻在笔者的耳边回响!

参考文献:

[1] [美] G·波利亚. 怎样解题[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2007.

[2]顾泠沅, 黄荣金, 费兰伦斯·马顿. 变式教学: 促进有效的数学学习的中国方式[J]. 云南教育·中学教师, 2007(3): 3-6.

(上接第5-1页)

刻计算所得的下落速度与理论速度的比较情况.

表 3

时间 (秒)	理论速度 由 (*) 计算	近似速度 $\Delta t=0.01$	近似速度 $\Delta t=0.001$
1	8.4611489	8.4753023	8.4625628
2	12.394923	12.411174	12.396546
3	13.586327	13.594425	13.587138
4	13.896841	13.899859	13.897145
5	13.974491	13.975481	13.974591
6	13.993705	13.994009	13.993736
7	13.998447	13.998537	13.998457
8	13.999617	13.999643	13.99962
9	13.999906	13.999913	13.999906

结论: 当Δt越小时, 近似计算所得速度与理论速度误差越小; 当t越大(下落时间越长)时, 近似计算所得速度与理论速度也越接近.

计算数学是现代数学的一个重要内容. 由于计算机的出现, 我们可以通过数学实验, 数值分析, 计算机模拟来发现、验证、求解问题. 因此, 计算机时代有时需要一种"算"的角度来看待问题. 计算在今天成为与理论和实验并列的三大重要科学研究方法之一, 计算是数学教育中继欧氏几何、微积分、纯粹数学之后的第四个里程碑[1]. 现在我国的中学数学教育几乎不涉及计算数学, 即便有算法课程但没有实践要求, 这是非常遗憾的. 所以介绍这一问题的实验计算解法, 目的是希望我们教师在平时的教学中重视学生的"计算"思想, 而不是为了高考在课堂中只强调以求证的模式做题.

参考文献

[1] 李秉彝. 黄兴丰编译. 为什么在学校我们要教这样的数学[J]. 数学教学, 2011(7): 1-4.

一道全国高中数学联赛试题的解法探究

300387 天津师范大学数学系 边 欣

2011年全国高中数学联合竞赛一试(B卷)的第9题为:

已知实数x、y、z满足: $x \geqslant y \geqslant z, x+y+z=1, x^2+y^2+z^2=3$. 求实数$x$的取值范围.

这是一道构思巧妙的试题. 本文将从代数、几何、三角、解析等几个方面探究此题的解法. 先对x、y、z进行如下变换,

令$u=\frac{x}{2}+\frac{1}{6}, v=\frac{y}{2}+\frac{1}{6}, w=\frac{z}{2}+\frac{1}{6}$.

容易验证

$u+v+w=1, u^2+v^2+w^2=1$,

且$x \geqslant y \geqslant z$等价于$u \geqslant v \geqslant w$. 问题转化为求实数$u$的取值范围.

1.代数法

由$v+w=1-u, v^2+w^2=1-u^2$, 得

$2vw=(v+w)^2-(v^2+w^2)=(1-u)^2-(1-u^2)=2u^2-2u$, 故$vw=u^2-u$.

从而v、w是关于s的一元二次方程$s^2+(u-1)s+u^2-u=0$的两个实数根.

由判别式

$\Delta=(u-1)^2-4(u^2-u) \geqslant 0$,

得$3u^2-2u-1 \leqslant 0$, 即$(3u+1)(u-1) \leqslant 0$, 故$-\frac{1}{3} \leqslant u \leqslant 1$.

又因为$v \geqslant w$, 故$v=\frac{1}{2}(1-u+\sqrt{\Delta}), w=\frac{1}{2}(1-u-\sqrt{\Delta})$.

再由$u \geqslant v$得 $u \geqslant \frac{1}{2}(1-u+\sqrt{\Delta})$,

故$3u-1 \geqslant \sqrt{\Delta}$, 即$u \geqslant \frac{1}{3}$, 且$(3u-1)^2 \geqslant \Delta$. 从而$3u^2-2u \geqslant 0$, 故$u \leqslant 0$或$u \geqslant \frac{2}{3}$.

综上可知, $\frac{2}{3} \leqslant u \leqslant 1$, 从而$1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$.

2.几何法

先证明一个结论:

引理 设$\triangle XYZ$是等腰三角形, $XY=XZ=n, YZ=m$. 过点Z作XY的垂线, 垂足为点U, 则$XU=\left|n-\frac{m^2}{2n}\right|$.

证明: 过点X作YZ的垂线, 垂足为点V, 则$XV=\sqrt{n^2-\frac{m^2}{4}}$.

如图1, $\triangle XYZ$的面积为

$\frac{1}{2}n \times ZU=\frac{1}{2}m\sqrt{n^2-\frac{m^2}{4}}$,

故 $ZU=\frac{m}{n}\sqrt{n^2-\frac{m^2}{4}}$.

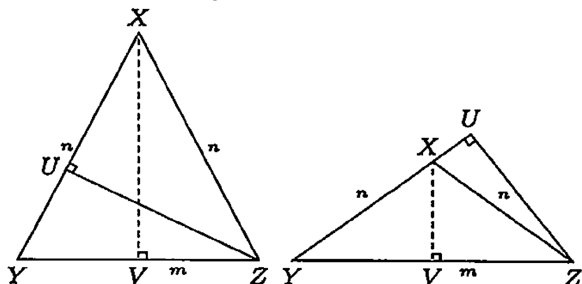


图 1

从而 $XU=\sqrt{n^2-\frac{m^2}{n^2}\left(n^2-\frac{m^2}{4}\right)}$

$=\left|n-\frac{m^2}{2n}\right|$. 证毕.

在三维空间的直角坐标系$O-uvw$中, $u+v+w=1$表示由三点$A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$所确定的一个平面. $u^2+v^2+w^2=1$表示以原点$O(0,0,0)$为球心, 以1为半径的单位球面. $\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCA$均是等腰直角三角形, 且$OA=OB=OC=1, AB=BC=CA=\sqrt{2}$, 从而$\triangle ABC$是正三角形.

记上述平面与球面相交所确定的圆的圆心为P, 则点P是$\triangle ABC$的重心, 且圆P的半径为$\frac{\sqrt{6}}{3}$. 连结点C、P并延长, 与圆P交于点D. 连结点A、P并延长, 与圆P交于点E.

如图2、3, 圆周上满足$u \geqslant v$的点组成弧DAC, 满足$v \geqslant w$的点组成弧$ADBE$. 故满足$u \geqslant v \geqslant w$的点组成弧$AD$. 过点$D$作$OA$

的垂线，垂足为点F，则$OF\leqslant u\leqslant OA$．因为$\triangle PAD$是正三角形，故$AD=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

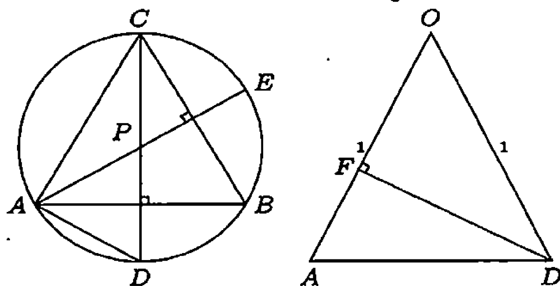


图2

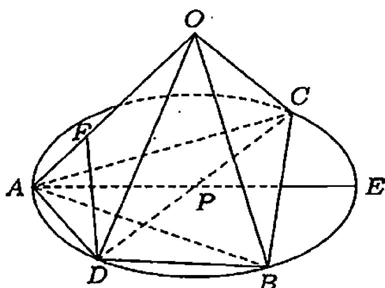


图3

在$\triangle OAD$中，$OA=OD=1,AD=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．利用上面的引理，可得$OF=\dfrac{2}{3}$．

因为$OF\leqslant u\leqslant OA$，故$\dfrac{2}{3}\leqslant u\leqslant 1$，

从而$1\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{3}$．

3.三角法

易知$0<u\leqslant 1$．当$u=1$时，$v=w=0$．当$u<1$时，令$v=\sqrt{1-u^2}\sin\theta,w=\sqrt{1-u^2}\cos\theta$，其中$0\leqslant\theta<2\pi$．

由$u+v+w=1$得

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

由$v\geqslant w$得$\sin\theta\geqslant\cos\theta$，故

$$2\sin\theta\geqslant\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}，即\sin\theta>0.$$

又因为$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{(1-u)^2}{1-u^2}=\dfrac{1-u}{1+u}$，得$2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-u}{1+u}-1=\dfrac{-2u}{1+u}<0$，故$\cos\theta<0$．

由$u\geqslant v$得$\sin\theta\leqslant\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}$，故

$$\sin^2\theta\leqslant\frac{u^2}{1-u^2},$$

且

$$\cos\theta=\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}-\sin\theta\geqslant\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1-2u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

故$\cos^2\theta\leqslant\dfrac{(1-2u)^2}{1-u^2}$，从而

$$\frac{u^2}{1-u^2}+\frac{(1-2u)^2}{1-u^2}\geqslant\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

即$u^2+(1-2u)^2\geqslant 1-u^2$，得$3u^2-2u\geqslant 0$，故$u\geqslant\dfrac{2}{3}$．

综上可知$\dfrac{2}{3}\leqslant u\leqslant 1$，从而$1\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{3}$．

4.解析法

由$u+v+w=1,u^2+v^2+w^2=1$，得

$2uv+2vw+2wu=(u+v+w)^2-(u^2+v^2+w^2)=0$，故$uv+vw+wu=0$．

从而u、v、w是关于t的一元三次方程$t^3-t^2-uvw=0$的三个实数根．

设函数$f(t)=t^3-t^2$．则$f'(t)=3t^2-2t$．可知

当$t<0$时，$f'(t)>0$，$f(t)$严格单增；

当$0<t<\dfrac{2}{3}$时，$f'(t)<0$，$f(t)$严格单减；

当$t>\dfrac{2}{3}$时，$f'(t)>0$，$f(t)$严格单增，

并且$f(t)$在$t=0$处取极大值0，在$t=\dfrac{2}{3}$处取极小值$-\dfrac{4}{27}$．如图4所示，其中点A、点B的坐标分别为$(0,0)$、$\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{27}\right)$．

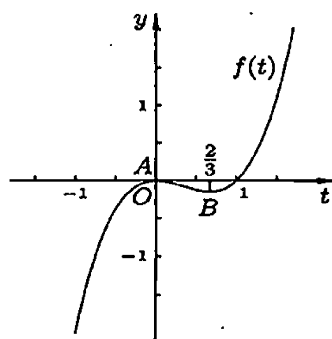


图4

因为u、v、w是关于t的方程$f(t)-uvw=0$的三个实数根，即将曲线$f(t)$沿纵轴方向向上(或向下)平移$|uvw|$个单位后，所得曲线与横轴交点的横坐标．注意到$u\geqslant v\geqslant w$，且u、v、w不能全相等，即将$f(t)$平移后得到的曲线与横轴至少有2个交点．故当点A与坐标系的原点重合

一道角度难题的八种解法

430079 湖北省武汉市华中师范大学国家数字化学习工程技术研究中心 彭翕成

网上曾流传“世界上最难的简单几何题”，很多数学爱好者对之提出了自己的解法，讨论很是热闹，有兴趣的读者可以在网上搜索．这种几何题不太常见，因为已知条件涉及大量的角度，要求解的也是角度．

笔者经过一段时间资料的查找，没发现此类问题的系统论述．既然没有现成资料，也只能自己收集整理了．这道题和相关解答收集于一些英文杂志和论坛，现翻译过来与大家分享．

如图1，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=20°$，$\angle DBC=60°$，$\angle ECB=50°$，求$\angle EDB$．

解法1：易得$BE=BC$，在$\triangle BED$和$\triangle BCD$中利用正弦定理，设$\angle EDB=x$，

$$\frac{\sin(160°-x)}{\sin x}=\frac{BD}{BE}=\frac{BD}{BC}=\frac{\sin 80°}{\sin 40°},$$

于是

$\sin(20°+x)=2\cos 40°\sin x$，

$\sin 20°\cos x+\cos 20°\sin x$

$=2(\cos 60°\cos 20°+\sin 60°\sin 20°)\sin x$，

解得$x=30°$．

评析：此解法无需添加辅助线，但三角函数计算有一点小技巧．

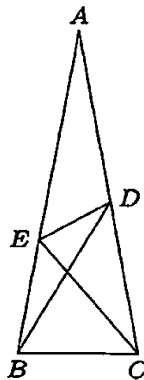


图1

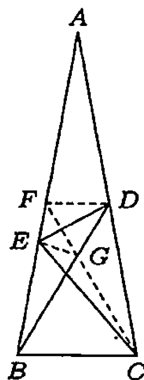


图2

解法2：如图2，作$DF/\!/BC$交AB于点F，设CF交BD于点G，则$\triangle BGC$和$\triangle DGF$是等边三角形，$\triangle CEB$是等腰三角形，所以$BE=BC=BG$，连结EG，所以$\triangle BEG$是等腰三角形，$\angle BGE=80°$，$\angle EGF=40°$，而$\angle BFC=40°$，所以四边形$EFDG$是筝形，$\angle EDB=30°$．

评析：点F的添加，使得图形左右对称，构造出等边三角形．

时，u取到最大值．此时$v=w=0$，从而$u=1$，即u的最大值为1，如图4所示．

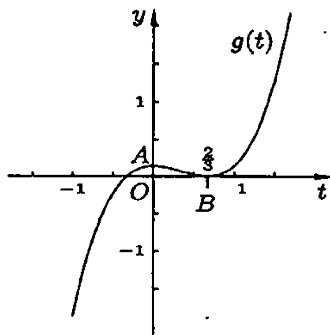


图5

同理，当点B随着曲线$f(t)$沿纵轴方向向上平移$\frac{4}{27}$个单位至横轴上时，u取到最小值．平移后所得曲线记为$g(t)$，点B的坐标为$\left(\frac{2}{3},0\right)$．此时$u=v=\frac{2}{3}$，从而$w=-\frac{1}{3}$，即$u$的最小值为$\frac{2}{3}$，如图5所示．

综上可知$\frac{2}{3}\leqslant u\leqslant 1$，从而$1\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}$．

一道“好”的题目，应当具有一定的挑战性，但又不超出学生所学知识范围，从而使学生在探究数学问题的过程中，不仅能够加深对有关概念的理解，巩固所学知识和方法，并加以灵活运用，而且有助于激发对数学的兴趣，开发数学的潜能，并使学生在解决问题的过程中能感受数学的奇妙．

解法3: 如图3, 作$DF//BC$交AB于点F, BD交CF于点G, 作$BH//CD$交DF于点H, 连结HE、EG. $\therefore \angle GCB=60^\circ$, $BE=BC=CG$, $BH=CD$, $\angle EBH=\angle GCD=20^\circ$, $\triangle EBH\cong\triangle GCD$. $\therefore \angle BHE=\angle CDG=40^\circ$, $\angle BHD=80^\circ$, 而$\angle EHD=\angle BHE=40^\circ$, 所以$E$是$\triangle BDH$的内心, $\angle EDB=30^\circ$.

评析: 点H的添加, 构造出平行四边形.

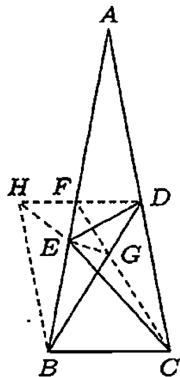


图3

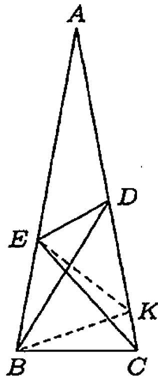


图4

解法4: 如图4, 在AC上取点K使得$\angle KBC=20^\circ$, 连结KB、KE, $BE=BC=BK$, $\angle EBK=60^\circ$, 则$\triangle EBK$是等边三角形, $\triangle KBC$是等腰三角形, $\angle BKC=80^\circ$, $\angle EKD=40^\circ$. $\angle BDK=40^\circ$, $\triangle BKD$是等腰三角形, $KD=KB=KE$, $\triangle KDE$是等腰三角形, $\angle EDK=70^\circ$, $\angle EDB=30^\circ$.

评析: 点K的添加如神来之笔, 一点定乾坤. 构造出好几个等腰、等边三角形, 题目变得异常简单.

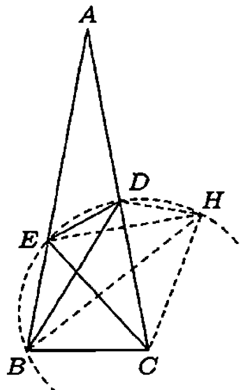


图5

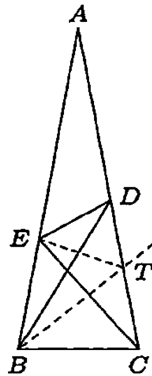


图6

解法5: 如图5, 设点E关于CD的对称点为H, 连结HB、HC、HD、HE, 则$\triangle ECH$是等边三角形. 而$BE=BC$, 四边形$BCHE$是筝形, $\angle EBD=\angle DBH=20^\circ$, 而$DE=DH$, 所以$B$、$H$、$D$、$E$四点共圆, $\angle EDB=\angle EHB=30^\circ$.

评析: 外接圆的添加, 充分利用圆周角性质.

解法6: 如图6, 设$\angle ABC$的角平分线交AC于点T, 连结ET. $\triangle ETB\cong\triangle CTB$, $\angle EBT=\angle CBT=40^\circ$, $\angle ETB=\angle CTB=60^\circ$, $\angle ETD=60^\circ$, 故TD平分$\triangle ETB$中$\angle ETB$的外角.

又$\angle EBD=20^\circ$, $\angle EBT=40^\circ$, 故BD平分$\angle EBT$, 所以D是$\triangle ETB$的旁心, ED平分$\angle AET$, $\angle DEA=50^\circ$, $\angle EDB=30^\circ$.

评析: 充分利用角平分线性质, 构造旁心.

解法7: 如图7, 设O是$\triangle CDE$的外心, 连结OD、OE、OB、OC. $\angle EOD=2\angle ECD=60^\circ$, $\triangle EOD$是等边三角形. $ED=OD$, 此时D在EO的中垂线上.

由$\triangle OEB\cong\triangle OCB$, 得$\angle EBO=\angle CBO=40^\circ$. $\angle EBD=20^\circ$, 故BD平分$\angle EBO$.

由$ED=OD$, $BD=BD$, $\angle EBD=\angle OBE$可知, 若B不在EO中垂线上, 则E、B、O、D四点共圆, 而$\angle EBO+\angle EDO=40^\circ+60^\circ\neq 180^\circ$, 矛盾, 因此$B$在$EO$中垂线上, DB平分$\angle EDO$, $\angle EDB=30^\circ$.

评析: 充分利用角平分线和中垂线性质.

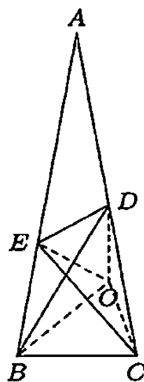


图7

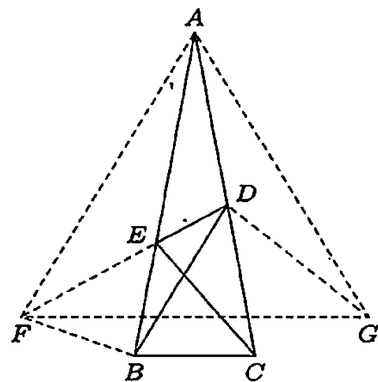


图8

解法8: 如图8, 设点C关于AB的对称点为点F, 点B关于AC的对称点为点G, 连结AF、AG、FG、FB、FE、DG, 则$\triangle AFG$是等边三角形. $\angle BFG=20^\circ$, FE平分$\angle AFG$; 而$DA=DB=DG$, 则D在AG中垂线上. 根据等边三角形三线合一, F、E、D三点共线, $\angle EDB=\angle FEB-\angle EBD=30^\circ$.

评析: 利用对称, 构造等边三角形.

笔者还查找到另外一些解法, 当然, 单纯这

一道"错位中点"试题的改编过程与思考

225264 江苏省扬州市江都区杨庄中学 肖世兵

原题 如图1, 已知等腰直角三角形ABC和等腰直角三角形AED中, $\angle AED=\angle ACB=90°$, 点$D$在$AB$上, 连结$EC$, M、N分别为DB、EC的中点. 求证: $MN=\frac{1}{2}CE$.

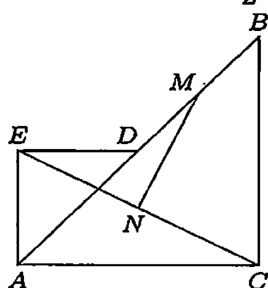


图1

常见解题思路: 借助中点构造全等三角形, 从而形成常见的三角形中位线的基本图形.

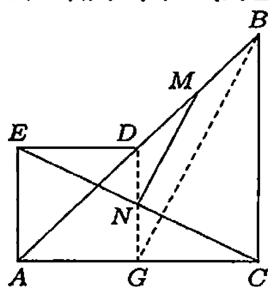


图2

方法1: 如图2, 连结DN并延长交AC于点G, 连结BG. 先证$\triangle EDN\cong\triangle CGN$, 得$DN=NG$, 利用三角形中位线得$MN=\frac{1}{2}BG$. 再证$\mathrm{Rt}\triangle GCB\cong\mathrm{Rt}\triangle EAC$, 得$BG=CE$.

方法2: 如图3, 过点B作$BH/\!/AC$交EM延长线于点H, 连结CH. 先证$\triangle EDM\cong\triangle HBM$, 得$EM=MH$, 利用三角形中位线得$MN=\frac{1}{2}CH$. 再证$\mathrm{Rt}\triangle CBH\cong\mathrm{Rt}\triangle CAE$, 得$CH=CE$.

所谓"错位中点"问题, 是指题中出现不共端点的两条线段的中点. 此类题型中的图形不同

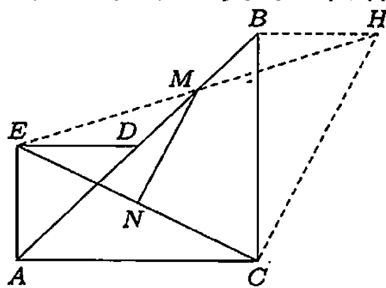


图3

于常见的三角形中位线和梯形中位线的一些基本图形, 所以常常令我们的解题思路受阻.

"中点"贯穿初中几何教学的各章节, 在初中几何中与中点有关的定理、图形俯拾皆是. 原题缺乏一定的梯度、区分度, 若将此题直接用于数学测试中考查学生的能力, 不太符合课改的要求, 有偏难之嫌. 为了充分地体现"中点"的作用, 更好地考查学生的推理能力, 探究、分析问题能力

八种解法已经足够让我们感到惊讶了, 刚看到题目时, 哪里想到这样的角度问题会和这么多的知识点联系在一起呢?

通过这个例子, 我们发现此类角度问题, 要么添加辅助线, 巧妙构造几何图形, 要么利用三角函数计算. 若是思路不对, 也确实耗费时间.

为什么这道题有这么多巧妙解法呢? 除了这道题本身有内涵之外, 很重要的原因是国外几本杂志都刊登了此题, 在国外的一些论坛上也有讨论, 众人拾柴火焰高, 各种巧解争奇斗艳. 国内的很多中学数学期刊也开设了数学问题与解答栏目, 但大家参与程度不够. 笔者猜测: 可能和杂志本身的作法也有关, 因为杂志要求供题人提供参考答案, 并在下一期刊登. 其实可以更加开放, 譬如在刊登参考答案的同时, 也刊登其他人的巧妙解答. 要是允许提供一些没有参考答案的题目, 相信更能激起数学爱好者挑战的激情.

等，挖掘本题的数学价值，笔者对原题做了一些改编的尝试.

改编一　已知等腰直角三角形ABC和等腰直角三角形AED中，$\angle AED=\angle ACB=90°$，点$E$在$AB$上，连结$EC$，$M$、$N$分别为$DB$、$EC$的中点.

(1) 当点E在AB上，且点C与点D重合时，如图4所示. MN与EC的大小关系是______.

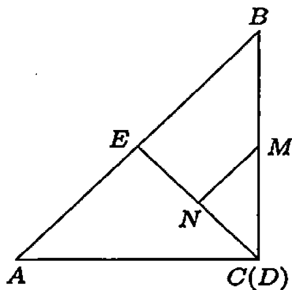


图 4

(2) 当点E、D分别在AB、AC上，且点C与点D不重合时，如图5所示. 则(1)问中MN与EC的大小关系还成立吗？说明理由.

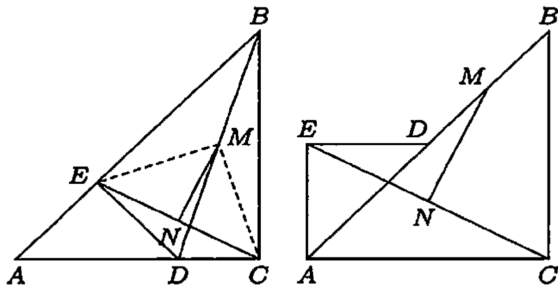


图 5　　图 6

(3) 在(2)的条件上，将Rt$\triangle AED$绕点A逆时针旋转，使得点D落在AB上，如图6所示. 则(1)问中MN与EC的大小关系还成立吗？说明理由.

解答分析：(1) $MN=\frac{1}{2}EC$；(2) 连结EM，CM. 先在Rt$\triangle EBD$和Rt$\triangle BCD$中，利用"直角三角形的斜边上的中线等于斜边的一半"说明$EM=MC=\frac{1}{2}BD$，再说明$\angle EMC=90°$(方法1：说明$\angle EMD=2\angle EBD, \angle CMD=2\angle CBD$，从而得到$\angle EMC=2\angle EBC=90°$. 方法2：先说明点$E$、$B$、$C$、$D$在以$BD$为直径，以点$M$为圆心的圆上，再利用圆周角定理，得到$\angle EMC=2\angle EBC=90°$)，得到$MN=\frac{1}{2}EC$；(3) 同原题的解答方法.

改编意图：原题是以两个等腰直角三角形为主体的静态构图，研究发现当等腰直角三角形ABC处于一些特殊位置时，$MN=\frac{1}{2}CE$的结论仍然成立. 为了体现"试题设计要有区分度"的原则，笔者采用了多问的形式，为学生合理地搭建探究的"梯子"，激发学生的探究欲望，发挥试题对促进学习的引导价值. 改编后的试题，采用了位似变换和旋转变换的运动方式，由特殊到一般，体现了知识间的联系. (1)问采用填空形式，注重猜想，减少说理过程，降低难度. 位似变换后的(2)问是苏科版九年级(上)第一章图形与证明(二)复习题中第11题的变式，(2)问源于教材，又高于教材. 旋转变换后的(3)问，对学生的几何能力提出了更高的要求，有较强的选拔与甄别功能，改编后的试题，由浅入深，循序渐进，较为全面地考查了学生综合运用中点的有关知识和能力.此外，本题还有拓展的空间，也可以探究在这一变化过程中，MN与EC的位置关系.

改编二　在正方形$ABCD$和正方形$AEFG$中，点A、B、G在同一直线上. 点M是CF的中点，点N是BG的中点.

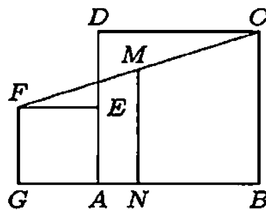


图 7

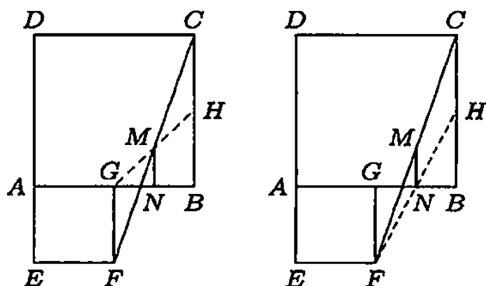


图 8

(1) 如图7，当点G在BA的延长线上时，试说明$MN=\frac{1}{2}BG$.

(2) 在(1)的条件下，将正方形$AEFG$绕点A旋转，使得点G落在边AB上，如图8所示. (1)中的结论还成立吗？说明理由.

解答分析：(1) 略；(2) 方法1：连结GM，并延长交BC于点H. 先证$\triangle GMF\cong\triangle HMC$，得出$GM=MH, GF=CH$；再在$\triangle GHB$中利

用中位线说明$MN=\frac{1}{2}BH$; 最后, 利用线段和差关系说明$BG=BH$. 方法2: 连结FN, 并延长交BC于点H. 先证$\triangle GNF\cong\triangle BHN$, 得出$FN=HN, GF=BH$; 再在$\triangle FCH$中利用中位线说明$MN=\frac{1}{2}CH$; 最后, 利用线段和差关系说明$BG=CH$.

改编意图: 基于正方形与等腰直角三角形关系的考虑, 笔者将原题中的等腰直角三角形变换为正方形, 变化后的题、图, 呈现了另一番景象, 别有一番风味. (1) 问与梯形中位线基本图形联系紧密, 难度不大, 易于解决. (2) 问可以一题多解, 符合命题设计中"解决问题方法不单一" 的原则, 与原题相同的解题思路是"借助中点构造全等三角形, 从而形成常见的三角形中位线的基本图形", 但创新之处是, 在证明线段相等时, 不必用到二次全等, 可利用线段的和差关系即可证明.改编后的试题, 以两个正方形及其中一个正方形的旋转来构造问题, 图形简洁且为学生熟悉, 不会使学生因"陌生"产生畏惧心理, 整体难度低于改编一的难度, 体现了"四基"的考查目标.

改编三 如图9, $\triangle ABC$是等腰三角形, $\angle ACB=90°$, 以AC为边作矩形$ACDE$, 对角线AD与EC的交点为N. 直线AB与直线ED相交于点F, 点M是线段BF的中点.

(1) 如图9, 若$\triangle ABC$与矩形$ACDE$在直线AC的同侧时, 求证: $MN=\frac{1}{2}EC$.

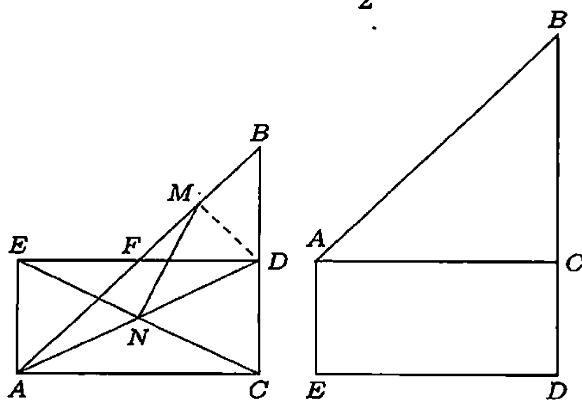


图 9

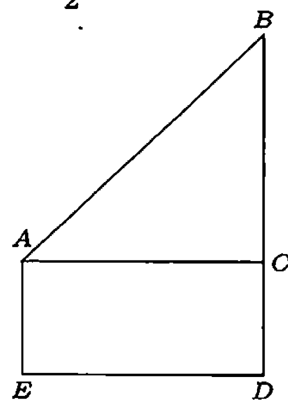


图 10

(2) 若$\triangle ABC$与矩形$ACDE$在直线AC的异侧时, 在图10中, 根据条件, 补全图形, 并判断(1)中的结论还成立吗? 说明理由.

解答分析: (1) 连结DM, 先在$\triangle FDB$中利用"等腰三角形的三线合一"说明$MD\perp AB$, 再利用"直角三角形的斜边上的中线等于斜边的一半"说明$MN=\frac{1}{2}AD$, 最后, 利用"矩形的对角线相等"即$AD=EC$, 说明$MN=\frac{1}{2}EC$; (2) 略.

改编意图: 联想到将原题中的ED延长后, 会得到一个矩形, 且EC的中点N正好是此矩形对角线的交点. 基于这样的联想, 编制了一道以矩形和等腰直角三角形为背景的"错位中点"试题. 此题不同于改编二的借助构造中位线基本图形解决问题的思路, 而是重点考查了利用"等腰三角形的三线合一"、"直角三角形的斜边上的中线等于斜边的一半"等知识综合解决问题的能力, 也体现了"错位中点"试题的另一解题思路. (2) 问设计除了考查学生求同存异, 探究图形变化的分析能力之外, 也考查学生对几何语言的运用和作图能力. 但此题设计缺乏梯度, 一旦(1)问受阻, 极易造成此题两极分化现象, 即要么满分, 要么0分的现象, 从而导致试题缺乏效度、区分度.

改编感悟: 受时间、精力、能力等因素限制, 不可能所有试题都是命题者创造性地编制出来, 大部分的试题来源于对已有试题的改编.因而, 改编是试题命制常见方法之一. 如何改编试题呢?

首先, 要选取好的素材, 所选素材应能体现学生现阶段掌握的基本知识, 基本技能, 基本方法等.

其次, 选择合理的改编试题的方法.常见改编试题的方法有:

(1) 改变试题的题型. 如改编一, 将原先的单一的几何证明, 改编为一道几何综合探究题. 改编后的试题, 有利于引导学生学会思考, 学会分析问题, 对于复杂、陌生的难题, 可以通过特殊化的方法(将图形的位置特殊、形状特殊), "退"到简单的、熟悉的问题, 化复杂为简单, 化陌生为熟悉, 通过寻求变化过程中的不变, 寻求问题的突破.

(2) 改换试题的情境. 如改编二, 将原题的等腰直角三角形改换为正方形, 呈现的图形也相应发生了改变, 变化后的图形更简洁, 也为学生所熟悉.

(3) 转变考查的目标. 如改编三, 由平行四边

(下转封底)

妙用不等式$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$巧解题

830002 新疆乌鲁木齐兵团二中 张国治

我们熟知, 若用$a$kg白糖制出$b$kg糖溶液, 则糖的质量分数为$\frac{a}{b}$. 若在上述不饱和溶液中再添加$m$kg白糖, 此时糖的质量分数为$\frac{a+m}{b+m}$. 将这个事实抽象为数学问题, 即若a、b、$m \in \mathbf{R}^+$, 且$a < b$, 则$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ $(*)$.[1] 恰当地利用此不等式可巧妙地证明一些较复杂的不等式, 下面举例说明此不等式的应用.

例1 (人教社选修4-5不等式选讲P.28) 已知a、b是实数, 求证:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

分析: 教科书中是采用$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = 1 - \frac{1}{1+|a+b|} \leqslant 1 - \frac{1}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$来证明的, 技巧性较强, 事实上, 利用已证的不等式$(*)$便有如下简洁的证法.

证明: $\because 0 \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$,

$\therefore m = |a|+|b|-|a+b| \geqslant 0.$

由不等式$(*)$得

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a+b|+m}{1+|a+b|+m} = \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

例2 (2008年全国高中数学联赛山东省预赛题第17题) 若$x>0, y>0, z>0$且$xyz=1$, 求证: $1 < \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} < 2.$

解: 依题意可设$x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$, ($a$、$b$、$c \in \mathbf{R}^+$), 则

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+a+b} = 1.$$

另一方面, 由不等式$(*)$可知

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b+a}{b+c+a} + \frac{c+b}{c+a+b} = 2,$$

所以原不等式成立.

例3 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 且对任意的$n \in \mathbf{N}^*$, a_n总是n与S_n的等差中项.

求证: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2.$

解: 由题意可知$2a_n = n + S_n$, 故$2a_{n-1} = n-1+S_{n-1}$, 两式相减得$2a_n - 2a_{n-1} = 1 + S_n - S_{n-1}$, 即$a_n = 2a_{n-1}+1\,(n \geqslant 2)$, $\therefore a_n + 1 = 2(a_{n-1}+1)\,(n \geqslant 2)$, 故数列$\{a_n+1\}$是以2为公比$a_1+1$为首项的等比数列, 易知$a_n = 2^n - 1$, $\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n-1}$, 由不等式$(*)$可知

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n-1} < \frac{1+1}{2^n-1+1} = \frac{2}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geqslant 2),$$

$$\therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 1.$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{a_1} = 2.$$

例4 (2009年山东省高考理科第20题) 等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 已知对任意的$n \in \mathbf{N}^*$, 点(n, S_n)均在函数$y = b^x + r$ ($b>0$且$b \neq 1$, b、r均为常数) 的图像上.

(I) 求r的值;

(Ⅱ) 当 $b=2$ 时, 记 $b_n=2(\log_2 a_n+1)$ $(n\in \mathbf{N}^*)$, 证明: 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 不等式 $\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdot\cdots\cdot\frac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$ 成立.

解: (I)略. (Ⅱ)由(I)知 $a_n=(b-1)b^{n-1}$, 当 $b=2$ 时, 易知 $b_n=2n$, 故要证的不等式为

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}.$$

记 $A=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}$, 由不等式(*)得 $\frac{2n}{2n+1}<\frac{2n+1}{2n+2}$, 即 $\frac{2n+1}{2n}>\frac{2n+2}{2n+1}$, 也即 $A>B=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+2}{2n+1}$, 故

$$A^2>AB=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}=n+1,$$

故 $A=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}$.

例5 证明: 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 不等式

$$\frac{1^2+1+1}{1^2+1}\cdot\frac{2^2+2+1}{2^2+2}\cdot\frac{3^2+3+1}{3^2+3}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n}<\mathrm{e}$$ 成立,

证明: 原不等式等价于 $\frac{1^2+1}{1^2+1+1}\cdot\frac{2^2+2}{2^2+2+1}\cdot\frac{3^2+3}{3^2+3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}>\frac{1}{\mathrm{e}}$,

易证当 $n=1$, $n=2$ 时, 不等式成立.

当 $n\geqslant 3$ 时, 由不等式(*)可知

$\frac{n^2-1}{n^2}<\frac{n^2-1+n+1}{n^2+n+1}$, 即

$$\frac{n^2+n}{n^2+n+1}>\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

故当 $n\geqslant 3$ 时,

$$\frac{3^2+3}{3^2+3+1}\cdot\frac{4^2+4}{4^2+4+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}>\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{2}{3},$$

故

$$\frac{1^2+1}{1^2+1+1}\cdot\frac{2^2+2}{2^2+2+1}\cdot\frac{3^2+3}{3^2+3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}>\frac{1^2+1}{1^2+1+1}\cdot\frac{2^2+2}{2^2+2+1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{21}>\frac{8}{8\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

综上, 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $\frac{1^2+1}{1^2+1+1}\cdot\frac{2^2+1}{2^2+2+1}\cdot\frac{3^2+1}{3^2+3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2+1}{n^2+n+1}>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 成立, 即原不等式成立.

参考文献

[1] 刘绍学主编. 普通高中课程标准实验教科书选修4-5数学[M]. 北京: 人民教育出版社, 2007.

(上接第5-36页)

辑思维能力也能同步相互推进.

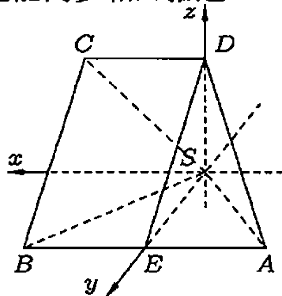


图 3

方法四: (I) 用综合几何方法求解(参考文[1]或文[2])(略).

(Ⅱ) 以 S 为原点, 以 SE 为 y 轴, 以 SD 为 z 轴, 如图3建立空间直角坐标系, 则 $D(0,0,1)$、$E(0,\sqrt{3},0)$、$B(1,\sqrt{3},0)$、$C(1,0,1)$, 有 $\overrightarrow{BE}=(-1,0,0)$, $\overrightarrow{SB}=(1,\sqrt{3},0)$, $\overrightarrow{SC}=(1,0,1)$. 设平面 SBC 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$, 由 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0\Longrightarrow x+\sqrt{3}y=0$, 由 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0\Longrightarrow x+z=0$, 取 $x=-3$, 则 $y=\sqrt{3}, z=3$, 有 $\overrightarrow{n}=(-3,\sqrt{3},3)$, 计算可得 $|\overrightarrow{n}|=\sqrt{21}$, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BE}=3$, 因此

$$\cos\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{BE}\rangle=\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{n}|\cdot\left|\overrightarrow{BE}\right|}=\frac{\sqrt{21}}{7},$$ 所以

AB 与平面 SBC 所成角为 $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

以上是从方法和图形两方面变换视角得到的一点体会, 作为抛砖引玉, 请读者批评指正.

参考文献

[1] 薛金星. 2011年全国及各省市高考试题全解[M]. 西安: 陕西出版集团, 2011.

[2] 袁铁宝. 对2011年高考全国卷立体几何题的探究[J]. 数学教学, 2011(11): 43-46.

[3] 厉倩. 立体几何中"非坐标向量"的教学思考[J]. 数学教学, 2008(12): 6-9.

编后漫笔

大众化和"简单化"

张奠宙　赵小平

20世纪以来, 随着科学进步, 使得工业产品大众化, 随之而来则是操作的"简单化". 回想当年的汽车司机, 几乎是一个汽车工程师, 车子经常出状况, 司机不得不亲自修理, 如果不懂得汽车的结构和原理, 如何能修好? 后来汽车自动化了, 只要会掌控方向盘, 踩刹车和油门, 就能轻松上路, 简单化了; 尤其是照相机进入千家万户后, 干脆以"傻瓜相机"为招徕; 近来风靡世界的苹果iPad, 对绝大多数使用者来说, "傻瓜化"的程度更上层楼, 至于其中的"过程", 只有专业人员才知道.

这联想到数学教育. 20世纪以来, 教育普及, 数学课程成为人人必修的科目. "简单化"的大众数学也就随之而来. 最明显的是平面几何课程, 19世纪的学校, 还以欧几里得的《几何原本》为教材, 从公理、公设出发展开. 希尔伯特更有严密的《几何基础》, 把平面几何建立在严密的逻辑体系之上. 随着大众数学的到来, 我们只保留了一些最基本的结果, 如勾股定理、三角形全等、圆的性质等等, 至于其来源, 不再囿于公理化体系了. 即便具有重大文化价值的平行公理, 也只当做"基本事实"一带而过. 总之, 知其然即可, 并不深究其所以然.

另一个"简单化"事例是数学课程中可公度与不可公度论证的消失. 大家都知道一个重要结论: 全体实数和数轴上的点一一对应. 这是坐标几何、函数图像、数形结合方法等一系列重大数学课题的出发点. 1950年代的教科书, 就有线段的可公度(对应有理数)和不可公度(对应无理数)的论证过程. 到了21世纪, 就只剩下了"结论"本身, 至于论证其成立的过程统统删去了.

晚近以来, 微积分进入中学课堂, 也不可能原原本本地把过程说清楚, 能够知道求导公式, 却不必知道其详细推导过程, 又是"傻瓜化"一例.

现如今, 讲究"过程性"目标, 认为凡事不但要知其然, 而且知其所以然, 这是应当关注的一种理想. 只是随着数学的大众化, 一定程度的"简单化"是不可避免的. 苏步青先生有一句名言: "中小学教材可以混而不错", 说的也是这个道理.

(上接第5-47页)

形的对角线互相平分, 联想到对角线的交点是对角线的中点. 改编后的试题降低了难度, 考查的内容都是学生初中几何中重要的定理性质, 凸显了学生对基础知识的综合运用能力, 体现了"在知识的衔接处的能力立意"的命题思想.

当然, 改编的方法不仅仅是以上方法, 有待大家的进一步交流研究, 补充完善.

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2012年第5期(总第297期)
名誉主编: 张奠宙
主　　编: 赵小平
常务副主编: 忻重义
发行范围: 公开
电　话: 021-62232712
主管单位: 中华人民共和国教育部
主办单位: 华东师范大学
出　　版: 上海《数学教学》杂志社
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 3100720050001
印　　刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 5.50元　国内统一连续出版物号: CN31-1024/G4　每月12日出版　代号: 4-357